

Graphes et applications, examen 2012

UE J1IN9W11, 2ème partie

1 Puissances de cycles

Soit C_n le cycle à n sommets. On appelle puissance k -ième du cycle, notée C_n^k , le graphe obtenu en reliant dans C_n tous les sommets à distance au plus k .

Question 1.1 Dessinez C_7^2 .

Question 1.2 Quel est le nombre d'arêtes de C_n^k ?

Question 1.3 Quelle est la maille (taille du plus petit cycle) de C_n^k ? Justifiez.

Question 1.4 Quelle est la taille d'un stable (= indépendant) maximum de C_n^k ? Justifiez.

Question 1.5 Quelle est la taille d'un dominant minimum de C_n^k ? Justifiez.

2 Domination

On rappelle que $\gamma(G)$ désigne le nombre de domination du graphe G , à savoir la taille du plus petit ensemble S tel que tout sommet de $V(G) \setminus S$ est voisin d'un sommet de S .

Soit G un graphe d'ordre n , et d_1, d_2, \dots, d_n la suite des degrés des sommets de G , ordonnée de façon à ce que $\forall i \in \{1 \dots n-1\}, d_i \geq d_{i+1}$.

Question 2.1 Montrez que $\gamma(G) \geq \min\{k \mid k + (d_1 + d_2 + \dots + d_k) \geq n\}$.

3 Vizing et suppression de sommet

3.1 Domination et suppression de sommet

Soit G un graphe, x un sommet de G . On note $G - x$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet x et toutes les arêtes qui lui sont incidentes.

Question 3.1 Proposez un minorant de $\gamma(G - x)$ en fonction de $\gamma(G)$. Justifiez la validité de la borne. Dessinez un graphe et un sommet x pour lesquels cette borne est atteinte.

Question 3.2 Que pouvez-vous dire d'un majorant de $\gamma(G - x)$?

3.2 Conjecture de Vizing

On rappelle que le produit Cartésien de deux graphes G et H , noté $G \square H$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et pour ensemble d'arêtes $\{(u, x)(v, x) \mid uv \in E(G)\} \cup \{(u, x)(u, y) \mid xy \in E(H)\}$.

La conjecture de Vizing suggère que pour tous graphes G et H ,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H).$$

On dira d'un graphe G qu'il *satisfait la conjecture de Vizing* si pour tout graphe H , l'inégalité est vérifiée.

Question 3.3 Qu'est-ce qu'un graphe qui ne satisfait pas la conjecture de Vizing ? Donnez une définition formelle.

Question 3.4 Montrez que si $\gamma(G) = 1$, alors G satisfait la conjecture de Vizing.

3.3 Conclusion

Soit G un graphe qui satisfait la conjecture de Vizing. Soit $x \in V(G)$ un sommet tel que $\gamma(G - x) = \gamma(G) - 1$.

Question 3.5 Montrez par l'absurde que $G - x$ satisfait la conjecture de Vizing.