

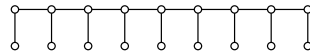
Optimisation dans les graphes, devoir individuel à la maison

Paul Dorbec

1 Problème

1.1 Lépidoptère

Une chenille est un arbre particulier. On forme une chenille à partir d'un chemin en attachant un nouveau sommet (une patte/une feuille) à chaque sommet. Ci dessous un exemple de chenille à 18 sommets.



Question 1.1 Calculez le nombre de domination d'une chenille en fonction de son nombre de sommets. Justifiez votre réponse.

Question 1.2 Calculez le nombre chromatique des chenilles. Justifiez.

Question 1.3 Montrez que l'ensemble des sommets d'une même couleur dans une coloration optimale de la chenille est un dominant.

1.2 Arbre

Question 1.4 Calculez le nombre chromatique des arbres.

Question 1.5 Montrez que l'ensemble des sommets d'une même couleur dans une coloration optimale d'un arbre non trivial est un dominant. Est-ce un dominant minimal ? Un dominant minimum ? Justifiez vos réponses.

Question 1.6 Déduisez une borne supérieure sur le nombre de domination des arbres. Justifiez que cette borne est atteinte.

1.3 Tous les graphes

Question 1.7 Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $G' = (V, E \cup \{uv\})$ ce graphe augmenté d'une arête uv . Proposez un encadrement de $\chi(G')$ en fonction de $\chi(G)$, prouvez-le.

Question 1.8 Proposez de même un encadrement de $\gamma(G')$ en fonction de $\gamma(G)$, prouvez-le.

Question 1.9 Montrez qu'un dominant d'un arbre couvrant d'un graphe G est un dominant du graphe G lui-même.

Question 1.10 Proposez une méthode pour calculer un ensemble dominant d'un graphe, en garantissant que l'ensemble proposé satisfait la borne de la question 1.6.

1.4 BFS ou DFS ?

Question 1.11 Dans la question 1.9, il est question d'arbre couvrant. Selon vous, y a-t-il un arbre couvrant plus efficace que les autres ? En particulier, parmi les arbres obtenus par des parcours BFS ou DFS, y en a-t-il un meilleur ? Vous illustrerez vos arguments et suggestions d'exemples.