

Dualité en PLNE avec la chasse à la bête

Par Aline Parreau

But de la séance : donner un problème ludique d'optimisation combinatoire, utiliser la RO et la dualité pour le résoudre, "sentir" ce qu'est le problème dual de ce jeu, et observer qu'il peut y avoir dualité faible (pas d'égalité min-max) ou forte (égalité min-max).

1 Présentation du jeu

On dispose d'un jardin représenté par une grille carrée. Mais ce jardin est envahi par des taupes qui peuvent se poser sur des cases suivant un schéma donné (par exemple sur 3 cases alignées). Nous voulons poser des pièges sur les cases de la grille de façon à ce que plus aucune bête ne puisse se poser dans le jardin.

Les pièges coûtant chers, le but est de minimiser le nombre de pièges à mettre.

2 Premier cas : la bête sur 3 cases alignées

Dans cette partie, on étudie des taupes qui font 3 cases de long :

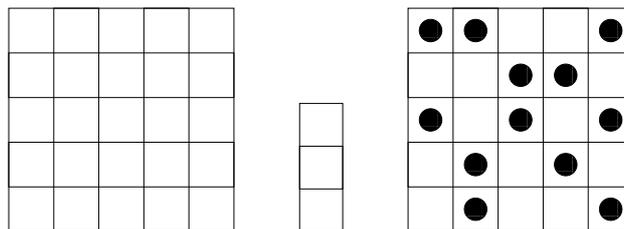


FIGURE 1 – Le jardin, la taupe et une solution avec 12 pièges

2.1 Des solutions

Après un petit temps de recherche, on trouve deux solutions avec 8 pièges :

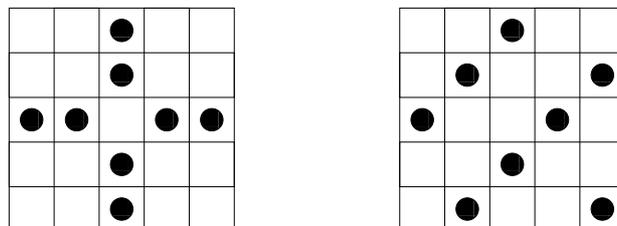


FIGURE 2 – Deux solutions avec 8 pièges

Sont-elles optimales ? Comment trouver une borne inférieure ?

2.2 Modélisation

Pour trouver une borne inférieure on peut essayer de comprendre le problème dual. Pour cela, on écrit le primal sous forme d'un programme linéaire. On commence par numéroter les cases de la grille avec deux indices i, j .

- **Variabes** : Une par case du jardin, soit 25 variables $x_{i,j}$ avec $i, j \in \{1, \dots, 5\}$. $x_{i,j} = 0$ signifie qu'il n'y a pas de piège sur la case (i, j) .
- **Fonction de coût** : minimiser la somme des $x_{i,j}$
- **Contraintes** : une par bête possible (i.e. par position possible d'une taupe). Soit \mathcal{B} l'ensemble des positions de bêtes. Une position $B \in \mathcal{B}$ est un ensemble de trois cases alignées de la grille. Par exemple $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ est un élément de \mathcal{B} . On a \mathcal{B}

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

FIGURE 3 – La bête est en position $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

Pour la position $B \in \mathcal{B}$, la contrainte est $\sum_{x_{i,j} \in B} x_{i,j} \geq 1$. Par exemple, pour la bête $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$, la contrainte obtenue est $x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \geq 1$.

Programme linéaire en nombre entiers :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_E : \quad & \min \sum x_{i,j} \\
 & \text{s.c. } \forall B \in \mathcal{B}, \sum_{(i,j) \in B} x_{i,j} \geq 1 \\
 & x_{i,j} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Relaxation linéaire :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_L : \quad & \min \sum x_{i,j} \\
 & \text{s.c. } \forall B \in \mathcal{B}, \sum_{(i,j) \in B} x_{i,j} \geq 1 \\
 & x_{i,j} \geq 0
 \end{aligned}$$

NB : On n'a pas besoin de $x_{i,j} \leq 1$ car une solution optimale a nécessairement $x_{i,j} \leq 1$ pour tout i, j .

2.3 Ecriture du Dual

On écrit le dual de \mathcal{P}_L :

- **Variables** : Une par position de bête possible : y_B avec $B \in \mathcal{B}$. On a $y_B \geq 0$.
- **Fonction de coût** : maximiser la somme des y_B
- **Contraintes** : une par case du jardin : pour la case i, j la contrainte est : $\sum_{(i,j) \in B} y_B \leq 1$
Autrement dit, la somme des valeurs pour chaque bête qui est sur la case i, j est plus petite que 1. Par exemple, pour la case (1, 1) la contrainte est : $y_{\{(1,1),(1,2),(1,3)\}} + y_{\{(1,1),(2,1),(3,1)\}} \leq 1$

Programme dual linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L : \quad & \max \sum y_B \\ & \text{s.c. } \forall i, j, \sum_{(i,j) \in B} y_B \leq 1 \\ & y_B \geq 0 \end{aligned}$$

Dans une solution, on a nécessairement, $y_B \leq 1$ donc en nombre entier on a comme problème :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_E : \quad & \max \sum y_B \\ & \text{s.c. } \forall i, j, \sum_{(i,j) \in B} y_B \leq 1 \\ & y_B \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Le problème dual est donc : placer le maximum de taupes sur le jardin, de manière à ce qu'aucune taupe ne se superpose.

Effectivement, une solution au problème dual donne immédiatement une borne inférieure pour le problème primal puisqu'il faut qu'il y ait au moins un piège sur chaque taupe placée.

2.4 Borne inférieure

On arrive à placer 8 taupes dans le jardin sans qu'il n'y ait de superposition :

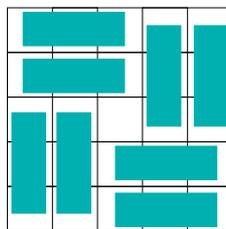


FIGURE 4 – On peut mettre 8 bêtes sans superposition

On a donc :

$$8 = \text{opt}(\mathcal{D}_E) \leq \text{opt}(\mathcal{D}_L) = \text{opt}(\mathcal{P}_L) \leq \text{opt}(\mathcal{P}_E) \leq 8$$

On en déduit l'égalité dans l'équation ci dessus. Il y a **dualité forte**. La solution du problème de départ est bien 8 pièges.

3 Deuxième cas : la bête en L



La taupe a maintenant la forme suivante :

Le problème reste le même.

Ici la meilleure solution trouvée à la main est avec 10 pièges :

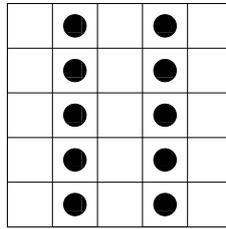


FIGURE 5 – Une solution avec 10 pièges pour la bête en L

Peut-on faire mieux ?

Le problème dual (paver avec des taupes en forme de L), nous donne une borne inférieure qui vaut 8. On a ici :

$$8 = \text{opt}(\mathcal{D}_E) \leq \text{opt}(\mathcal{D}_L) = \text{opt}(\mathcal{P}_L) \leq \text{opt}(\mathcal{P}_E) \leq 10$$

On peut montrer que $\text{opt}(\mathcal{P}_E) = 10$ de la manière suivante :

Sur n'importe quel carré 2×2 on doit placer au moins 2 pièges pour qu'aucune taupe ne puisse s'installer. Dans la figure suivante, on a placé 4 carrés 2×2 qui ne se superposent pas, il reste encore de la place pour 2 taupes. On a donc besoin d'au moins $4 \times 2 + 2 = 10$ pièges. (NB : cette preuve revient à faire des coupes : si on additionne pour un carré 2×2 les 4 équations des bêtes qui peuvent s'y trouver, on obtient, par exemple pour le carré $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$: $3(x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22}) \geq 4$, comme les x_{ij} sont entiers, on a nécessairement : $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \geq 2$.)

Avec cette méthode on a bien montré que $\text{opt}(\mathcal{P}_E) = 10$ Et on a donc : $\text{opt}(\mathcal{D}_E) \neq \text{opt}(\mathcal{P}_E)$. Il y a **dualité faible** : le problème dual nous donne une borne inférieure, mais qui n'est pas optimale.

On a :

$$8 = \text{opt}(\mathcal{D}_E) \leq \text{opt}(\mathcal{D}_L) = \text{opt}(\mathcal{P}_L) \leq \text{opt}(\mathcal{P}_E) = 10$$

En fait on peut montrer que $\text{opt}(\mathcal{P}_L) = 8$ c'est donc qu'on a : $\text{opt}(\mathcal{P}_L) \neq \text{opt}(\mathcal{P}_E)$.

Pour trouver une solution de \mathcal{P}_L on doit donner une fraction par case, de manière à ce que la somme des valeurs sur trois cases en L soit toujours plus grande que 1. La solution suivante est une solution de \mathcal{P}_L qui vaut 8, et qui est donc optimale :

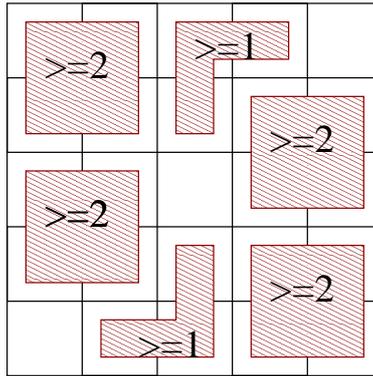


FIGURE 6 – On a besoin d’au moins 10 pièges pour la bête en L

	0,5		0,5	
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	0,5		0,5	
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	0,5		0,5	

FIGURE 7 – Une solution optimale fractionnaire qui vaut 8 pour la bête en L

4 Pour aller plus loin

Quelques questions :

- a-t-on toujours dualité forte pour la bête droite? (i.e pour d’autres tailles de jardin)
- a-t-on parfois dualité faible pour la bête en L ?
- bête mouvante : la bête fait 3 cases mais peut prendre les deux formes. Quel est alors l’optimal?
- et pour d’autres bêtes?