

# Optimisation dans les graphes, TD1

Paul Dorbec

## 1 Graphe de Kneser

Le graphe de Kneser, de paramètres  $k$  et  $n$ , noté  $Kn(k, n)$  est formé de la façon suivante : il a pour ensemble de sommets toutes les parties de tailles  $k$  d'un ensemble de  $n$  éléments, et deux sommets sont adjacents si et seulement si les ensembles correspondants sont disjoints.

**Question 1.1** Représentez le graphe  $Kn(2, 5)$ .

**Question 1.2** Montrez que les graphes de Kneser sont réguliers. Quel est le degré de leurs sommets ? Quel est leur nombre d'arêtes ?

## 2 Poignées de mains

Lors d'un colloque, cinquante mathématiciens se retrouvent. À la fin de la première journée, Arnaud P. demande à tous ses collègues combien de mains ils ont serrées. Il n'obtient que des réponses différentes.

**Question 2.1** Montrez qu'il n'existe que 2 possibilités d'ensembles de réponses.

**Question 2.2** Modélisez le problème par un graphe. Déterminez le nombre de mains qu'Arnaud P. a serrées.

## 3 Stables

Un ensemble est dit maximal s'il ne peut pas être augmenté en un ensemble plus grand. Un ensemble est dit maximum si aucun ensemble plus grand n'existe.

**Question 3.1** Trouver un graphe, dans lequel vous montrerez deux ensembles stables distincts, de tailles différentes, l'un maximal et l'autre maximum.

**Question 3.2** Utilisez la matrice d'incidence d'un graphe pour représenter le problème du nombre de stabilité à l'aide d'un PLNE :

$$\max(f(X)), MX \geq Y$$

Une partition en cliques d'un graphe est un ensemble de cliques disjointes du graphe qui recouvre tous les sommets.

**Question 3.3** Montrer une relation entre la taille maximale d'une partition en cliques du graphe et son nombre de stabilité.

Un transversal d'un graphe est un ensemble de sommets  $S$  tel que toute arête a une extrémité dans  $S$ .

**Question 3.4** *Quelle relation pouvez vous trouver entre le problème du transversal minimum et le problème du stable maximum ?*

**Question 3.5** *Représentez le problème du transversal minimum à l'aide d'un PLNE.*

Un dominant d'un graphe est un ensemble de sommets  $S$  tel que tout sommet est dans  $S$  ou voisin d'un sommet de  $S$

**Question 3.6** *Quand un transversal est-il un dominant ?*

**Question 3.7** *Montrez qu'un stable maximal est nécessairement un dominant.*