

Optimisation dans les graphes, TD5

Paul Dorbec

1 Couplages

1.1 Chaînes alternantes

On note $\alpha'(G)$ le nombre maximum d'arêtes d'un couplage maximum.

Soient G un graphe et M un couplage de G .

Question 1.1 Soit μ une chaîne dans G contenant des arêtes de M au moins pour moitié. Montrez que les arêtes de M alternent avec celles hors de M .

Une chaîne dont les arêtes alternent ainsi est appelée chaîne alternante.

Question 1.2 Montrez que s'il existe une chaîne alternante commençant et finissant par une arête hors de M , M n'est pas un couplage maximum. (On parle alors de chaîne améliorante.)

On parle alors de chaîne améliorante.

1.2 Couplage maximum non parfaits

Soit M un couplage maximum de G . Supposons qu'il reste 2 sommets u et v dans G non couverts par le couplage.

Question 1.3 Montrez que u et v sont indépendants.

Question 1.4 Montrez qu'aucun voisin de u ne forme une arête du couplage avec un voisin de v .

Question 1.5 Montrez que $\deg(u) + \deg(v) \leq 2|M|$.

Question 1.6 Montrez que si G est un graphe d'ordre $n \geq 2\delta$ et de degré min δ , alors $\alpha'(G) \geq \delta$.

1.3 Théorème de Berge

La différence symétrique de M et M' , notée $M \Delta M'$, est l'ensemble $(M \cup M') \setminus (M \cap M')$ des arêtes présentes dans un seul des deux couplages.

Question 1.7 Soient M et M' deux couplages de G . Montrez que la différence symétrique de M et M' est composée d'une union de cycles et de chemins.

Question 1.8 Montrez que tous les cycles de $M \Delta M'$ sont de longueur paire.

Question 1.9 Montrez que si M et M' ne sont pas de même taille, $M \triangle M'$ contient une chaîne de longueur impaire.

Question 1.10 Montrez le théorème de Berge : M est un couplage maximum de G si et seulement si G ne contient pas de chaîne M améliorante.