

# Optimisation dans les graphes, TD1

Paul Dorbec

## 1 Quelques familles de graphes

### 1.1 Graphes complets

Un graphe à  $n$  sommets est complet (noté  $K_n$ ) si toute paire de sommets du graphe est reliée par une arête.

**Question 1.1** *Quel est le degré de chaque sommet du graphe complet (à  $n$  sommets) ?*

**Question 1.2** *Quel est le nombre d'arêtes du graphe complet à  $n$  sommets ?*

### 1.2 Bipartis complets

Le graphe biparti complet  $K_{a,b}$  est le graphe à  $a + b$  sommets partitionnés en deux ensembles  $A$  et  $B$  tel que tout sommet de  $A$  est adjacent à tout sommet de  $B$ .

**Question 1.3** *De même, quels sont les degrés des sommets et le nombre d'arêtes du graphe ?*

### 1.3 Graphe de Kneser

Le graphe de Kneser, de paramètres  $k$  et  $n$ , noté  $Kn(k, n)$  est formé de la façon suivante : il a pour ensemble de sommets toutes les sous ensembles de tailles  $k$  d'un ensemble de  $n$  éléments ; et deux sommets sont adjacents si et seulement si les ensembles correspondants sont disjoints.

**Question 1.4** *Si on fixe  $k = 1$ , que sont les graphes  $Kn(1, n)$  ?*

**Question 1.5** *Représentez le graphe  $Kn(2, 5)$ .*

**Question 1.6** *Décrivez la structure des graphes  $Kn(k, 2k)$ .*

**Question 1.7** *Montrez que les graphes de Kneser sont réguliers. Quel est le degré de leurs sommets ? Quel est leur nombre d'arêtes ?*

## 2 Poignées de mains

Lors d'un colloque, cinquante matheux se retrouvent. À la fin de la première journée, Arnaud P. demande à tous ses collègues combien de mains ils ont serrées. Il n'obtient que des réponses différentes.

**Question 2.1** *Montrez qu'il n'existe que 2 possibilités d'ensembles de réponses.*

**Question 2.2** *Modélisez le problème par un graphe. Déterminez le nombre de mains qu'Arnaud P. a serrées.*

## 3 Stables

Un ensemble est dit maximal s'il ne peut pas être augmenté en un ensemble plus grand. Un ensemble est dit maximum si aucun ensemble plus grand n'existe.

**Question 3.1** *Trouver un graphe, dans lequel vous montrerez deux ensemble stables distincts, de tailles différentes, l'un maximal et l'autre maximum.*

Une partition en cliques d'un graphe est un ensemble de cliques disjointes du graphe qui recouvre tous les sommets.

**Question 3.2** *Montrer une relation entre la taille maximale d'une partition en cliques du graphe et son nombre de stabilité.*

Un transversal d'un graphe est un ensemble de sommets  $S$  tel que toute arête a une extrémité dans  $S$ .

**Question 3.3** *Quelle relation pouvez vous trouver entre le problème du transversal minimum et le problème du stable maximum ?*

Un dominant d'un graphe est un ensemble de sommets  $S$  tel que tout sommet est dans  $S$  ou voisin d'un sommet de  $S$

**Question 3.4** *Quand un transversal est-il un dominant ?*

**Question 3.5** *Montrez qu'un stable maximal est nécessairement un dominant.*