

Coloration par multi-somme

Olivier Baudon,
olivier.baudon@labri.fr,
Éric Sopena,
eric.sopena@labri.fr

24 novembre 2016

Le but de ce stage est d'étudier une nouvelle forme de coloration de graphes, que nous appellerons *coloration par multi-somme*. Cette coloration est inspirée de deux types de colorations déjà étudiées : la coloration par somme et la décomposition de graphes en sous-graphes localement irréguliers.

Dans la coloration par somme, il s'agit de mettre sur chaque arête d'un graphe G un poids compris entre 1 et un entier k , de telle façon que la somme des poids des arêtes incidentes calculée pour chaque sommet forme une coloration propre des sommets (voir Figure 1). La 1-2-3-conjecture [KLT04] suggère que pour tout graphe n'ayant pas d'arête isolée, il est toujours possible d'obtenir une telle coloration avec $k \leq 3$.

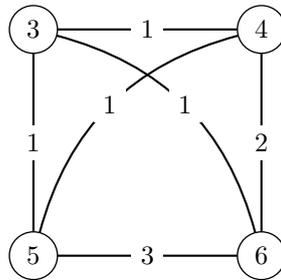


FIGURE 1 – Exemple de 3-somme-coloration de K_4

La décomposition d'un graphe en sous-graphes localement irréguliers consiste à colorier les arêtes du graphe (de façon impropre), de telle façon que dans chaque graphe partiel induit par les arêtes d'une même couleur, deux sommets voisins aient toujours des degrés différents (voir Figure 2). Certains graphes ne sont pas décomposables en sous-graphes localement irréguliers, mais pour tous ceux pour lesquels une telle décomposition est possible, il est conjecturé [BBPW15] que là aussi, trois couleurs suffisent.

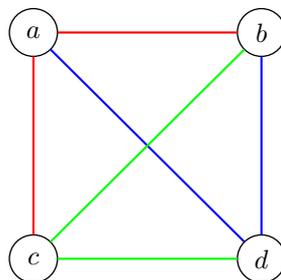


FIGURE 2 – Exemple de décomposition de K_4 en 3 graphes partiels localement irréguliers

La multi-coloration par somme consiste à colorier les arêtes du graphe à l'aide d'un ensemble C de couleurs et à leur affecter un poids compris entre 1 et k . Pour chaque sommet, on calcule la somme des poids des arêtes incidentes d'une même couleur $c \in C$. On obtient donc pour chaque sommet un $|C|$ -uplet $(s_1, \dots, s_{|C|})$ et l'on veut que pour toute paire de sommets voisins, il existe au moins une couleur c pour laquelle les valeurs de s_c soient différentes (voir Figure 3).

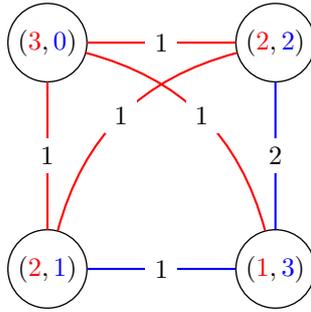


FIGURE 3 – Exemple de multi-somme décomposition de K_4 avec 2 couleurs et des poids 1 et 2

Si $|C| = 1$, la multi-coloration par somme correspond à la coloration par somme. Si $k = 1$, elle correspond à la décomposition en sous-graphes localement irréguliers.

L'objet du stage est donc d'étudier cette notion, en particulier pour $|C| = k = 2$.

Références

- [BBPW15] O. Baudon, J. Bensmail, J. Przybyło, and M. Woźniak. On decomposing regular graphs into locally irregular subgraphs. *European Journal of Combinatorics*, 49 :90–104, 2015. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejc.2015.02.031>.
- [KLT04] M. Karoński, T. Łuczak, and A. Thomason. Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory, series B*, 91 :151–157, 2004.
- [Sea12] B. Seamone. The 1-2-3 conjecture and related problems : a survey. <https://arxiv.org/pdf/1211.5122.pdf>, 2012.