
Programmation Mathématique
Responsable: A. Lisser
Nombre de pages: 2

TD 4

Exercice I

Donner les fonctions conjuguées dans \mathbb{R} des fonctions suivantes :

- $f(x) = \exp(x)$,
- $f(x) = x \log x$.

Exercice II

Soit \mathcal{C} l'ensemble de \mathbb{R}^2 défini par :

$$\mathcal{C} = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 + \xi_2 \leq 1, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\},$$

et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\xi_1, \xi_2) = -\xi_1 - 2\xi_2 - 2\xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2} + \frac{\xi_2^2}{2}$.

1° La fonction f est elle convexe ? concave ?

2° On considère le problème de la minimisation de f sur \mathcal{C} . Montrer que tout minimum (même local) se trouve sur la frontière $bd(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} .

Exercice III

soit f et h définies sur \mathbb{R}^2 comme suit :

$$\forall x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, f(x) = -\xi_2^3 - 2\xi_2^2 - \xi_2$$
$$h(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_2.$$

On considère le problème d'optimisation (\mathcal{P}) qui consiste à minimiser $f(x)$ sous la contrainte $h(x) = 0$.

1° Déterminer les points vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre. Parmi ces points, quels sont ceux qui sont minima globaux ? (il y en a deux que nous noterons \bar{x}_1 et \bar{x}_2).

2° Les conditions suffisantes du deuxième ordre pour être un minimum local strict dans (\mathcal{P}) sont elles satisfaites en \bar{x}_1 et \bar{x}_2 ?

Exercice IV

Etant donné r_1, \dots, r_n des réels tous strictement positifs, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^m$, on considère le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \min \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{x_i}{r_i}\right)$$

s.c. $x \in \Lambda_n$ et $Ax \leq c$.

Dans cette formulation, Λ_n désigne le simplexe unité de \mathbb{R}^n , et $\alpha \ln \alpha$ est prise égale à zéro pour $\alpha = 0$.

Soit $(x, \mu) \in \Lambda_n \times (\mathbb{R}^+)^m \longrightarrow \mathcal{L}(x, \mu) = \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{x_i}{r_i}\right) + \langle \mu, Ax - c \rangle$ le lagrangien dans le problème (\mathcal{P}) et

$$\mu \in (\mathbb{R}^+)^m \longrightarrow \psi(\mu) = \inf_{x \in \Lambda_n} \mathcal{L}(x, \mu)$$

la fonction duale associée.

Déterminer la forme explicite de ψ et formuler de manière simple le problème dual (\mathcal{D}) de (\mathcal{P}) .