

# Partiel de programmation mathématique

Paul Dorbec, Cédric Bentz, David Forge

11 mai 2009

Durée du partiel : 1h30 heures

Les documents et les calculatrices sont autorisés.

La qualité de la présentation aura une influence sur l'évaluation de la copie. Les résultats des calculs doivent être justifiés et les étapes des méthodes de recherche détaillées, au moins pour la première itération.

Certaines questions nécessitent des calculs, qui se veulent assez simples. Si vous n'avez pas de calculatrice, veuillez le préciser sur la copie et faire des arrondis cohérents (par exemple,  $\frac{105}{342} \simeq \frac{1}{3} \simeq 0.66$ ).

## 1 Propriétés générales

**Question 1.1** *Sur leur domaine de définition, les fonctions suivantes sont-elles convexes ? concaves ? Justifiez.*

$$\begin{aligned}f_1 : x &\rightarrow e^x \\f_2 : x &\rightarrow x^4 - 6x^2 + 5 \\f_3 : x &\rightarrow 3 \ln(x) - 16x + 18 \\f_4 : (x_1, x_2) &\rightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - 7x_2\end{aligned}$$

**Question 1.2** *Précisez si les points suivants sont des minima locaux, des maxima locaux ou aucun des deux. Justifiez.*

- Pour la fonction  $f_2$ , les points  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = -1.732$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 1$ ,  $a_5 = \sqrt{3}$ ,  $a_6 = 5$ .
- Pour la fonction  $f_4$ , les points  $a_1 = (0, 0)$ ,  $a_2 = (2, 3)$ ,  $a_3 = (3, 2)$ ,  $a_4 = (3, 5)$ ,  $a_5 = (4, 1)$ .

## 2 Optimisation unidimensionnelle

Nous allons chercher le minimum de la fonction  $f : x \longrightarrow x^4 - x^2 + 2x - 1$ .

**Question 2.1** *Utilisez la méthode de Newton pour minimiser la fonction  $f$  (3 itérations en partant) du point  $x_0 = 3$ .*

**Question 2.2** *Utilisez la méthode de dichotomie avec dérivées en partant de l'intervalle  $[-2, 2]$ , 4 itérations.*

Dans la question suivante, on s'intéresse à la fonction  $f : x \longrightarrow |x - 3| + |2x - 1|$ .

**Question 2.3** *Utilisez la méthode de dichotomie sans dérivées, en partant des points  $-2$  et  $6$ . Faites 4 itérations. Justifiez vos choix.*

## 3 Optimisation multidimensionnelle

**Question 3.1** *Utilisez la méthode de plus forte pente accélérée pour minimiser la fonction  $f : (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 - x_1x_2 - 3x_2 + x_3$ . Vous partirez du point  $(0, 0, 0)$  et utiliserez le paramètre d'accélération  $p = 2$ . Vous ferez 1 pas accélérés (3 déplacements). Pour calculer les pas de déplacements, vous résolvrez simplement l'équation  $g'(\lambda) = 0$ .*

**Question 3.2** *Faites un deuxième pas accéléré, à la suite du précédent.*