

Td 2: Optimisation en 1 dimension

Paul Dorbec, Cédric Bentz, David Forge

6 avril 2009

1 Convexité

Question 1.1 Précisez si les fonctions suivantes sont concaves, convexes ou ni l'un ni l'autre.

Correction :

- $f(x) = 7x - x^2$ est concave, $f''(x) = -2 < 0$
- $f(x) = \frac{1}{6}x^4 + x - 3$ est convexe, $f''(x) = 2x^2 > 0$
- $f(x) = x^5 - 3x^4$ n'est ni convexe, ni concave. $f''(x) = 20x^3 - 36x^2$ vaut $-16 < 0$ en $x = 1$ et $+16 > 0$ en $x = 2$
- $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ est convexe : $\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
donc $(a, b)\nabla^2 f(x_1, x_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2a^2 - 2ab + 2b^2 = (a - b)^2 + a^2 + b^2$
- $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^4$ n'est ni convexe ni concave :
 $(a, b)\nabla^2 f(x_1, x_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2a^2 - 4ab + 12b^2x_2^2$ est positif quand $(x_2, a, b) = (1, 1, 1)$ et négatif quand $(x_2, a, b) = (0, 1, 1)$.

2 Méthodes de descentes

2.1 appliquées à une fonction convexe

Utilisez les méthodes vues en cours pour trouver un point proche du minimum de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{(x-1)^4}{12} + (x-2)^2$$

Vous ferez à chaque fois 5 itérations.

Question 2.1 Utilisez la méthode de Newton en partant du point $a_0 = 4$,

Correction :

On calcule 5 fois $a_{k+1} = a_k - \frac{f'(a_k)}{f''(a_k)}$ avec $f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + 2(x-2)$ et $f''(x) = (x-1)^2 + 2$.

On obtient :

$$a_0 = 4; a_1 = 2.81; a_2 = 2.13; a_3 = 1.9; a_4 = 1.88; a_5 = 1.88$$

Question 2.2 Utilisez maintenant la méthode de la sécante, en partant des points $a_0 = 4$ et $a_1 = 3.5$.

Correction :

On utilise la formule du cours : $a_{k+1} = a_k - f'(a_k) \frac{a_k - a_{k-1}}{f'(a_k) - f'(a_{k-1})}$

On obtient :

$$a_0 = 4; a_1 = 3.5; a_2 = 2.64; a_3 = 2.21; a_4 = 1.96; a_5 = 1.89; a_6 = 1.88$$

Question 2.3 Utilisez la méthode de dichotomie avec dérivées, en partant des points $a_0 = -10$ et $b_0 = -9$. Vous commencerez par chercher un intervalle satisfaisant les conditions nécessaires de départ.

Correction :

On obtient :

a_i	b_i	$f'(a_i)$	$f'(b_i)$
-10	-9	-467	-355
-9	-7	-355	-188
-7	-3	-188	-31
-3	5	-31	27
1	5	-2	27
1	3	-2	4.66
1	2	-2	0.33
1.5	2	-0.96	0.33
1.75	2	-0.36	0.33
1.87	2	-0.03	0.33
1.87	1.94	-0.03	0.15
1.87	1.91	-0.03	0.06

On trouve un intervalle satisfaisant pour $i = 4$

Question 2.4 Utilisez maintenant l'interpolation quadratique en partant des points $-4, 0$ et 4 .

Correction :

On obtient :

a_1	$f(a_1)$	a_2	$f(a_2)$	a_3	$f(a_3)$	a_4	$f(a_4)$
-4	88.1	0	4.08	4	10.7	1.71	0.11
0	4.08	1.71	0.11	4	10.7	1.52	0.23
1.52	0.23	1.71	0.11	4	10.7	1.77	0.081
1.71	0.11	1.77	0.081	4	10.7	1.83	0.069
1.83	0.069	1.85	0.066	4	10.7	1.87	0.065
1.85	0.066	1.87	0.065	4	10.7	1.87	0.065

Question 2.5 Pour la dichotomie sans dérivées, utilisez les mêmes points de départ.

Correction :

On obtient :

\mathbf{a}_1	$\mathbf{f}(\mathbf{a}_1)$	a_4	$f(a_4)$	\mathbf{a}_2	$\mathbf{f}(\mathbf{a}_2)$	a_5	$f(a_5)$	\mathbf{a}_3	$\mathbf{f}(\mathbf{a}_3)$
-4	88.1	-2	22.7	0	4.08	2	0.083	4	10.7
0	4.08	1	1	2	0.083	3	2.33	4	10.7
1	1	1.5	0.255	2	0.083	2.5	0.671	3	2.33
1.5	0.255	1.75	0.089	2	0.083	2.25	0.266	2.5	0.671
1.75	0.089	1.87	0.064	2	0.083	2.12	0.149	2.25	0.266

2.2 Appliquées à une fonction non convexe, mais unimodale

On cherche maintenant le minimum de la fonction suivante¹ :

$$f(x) = \frac{(x-1)^4}{12} - (x-2)^2$$

Cette fonction est unimodale, elle a donc un unique minimum local. Vous ferez à chaque fois 5 itérations.

Question 2.6 Utilisez la méthode de Newton en partant du point $a_0 = 4$, puis en partant du point $a_0 = -1$ (faites 5 itérations). Qu'en pensez vous ?

Correction :

$$a_0 = 4, a_1 = 1.5, a_2 = 2.1, a_3 = 2.22, a_4 = 2.3, a_5 = 2.37, a_6 = 2.43, f'(a_6) = 0.12$$

$$a_0 = -1, a_1 = -1.48, a_2 = -1.66, a_3 = -1.75, a_4 = -1.80, a_5 = -1.82, a_6 = -1.83, f'(a_6) = 0.08$$

On voit 2 points de convergence distincts, il y a un problème...

¹Le sujet a été un peu corrigé

Question 2.7 Utilisez la méthode de la sécante, en partant des points $a_0 = 0$ et $a_1 = 3.5$. Même chose en partant de -12 et -10 .

Correction :

$$a_0 = 0, a_1 = 3.5, a_2 = 8.8, a_3 = 3.41, a_4 = 3.35, a_5 = 2.91, a_6 = 2.71$$

$$a_0 = -12, a_1 = -10, a_2 = -7.05, a_3 = -5.31, a_4 = -3.92, a_5 = -2.98, a_6 = -2.36$$

Question 2.8 Utilisez la méthode de dichotomie avec dérivées, en partant des points $a_0 = -12$ et $b_0 = 4$.

Correction :

a_i	$f'(a_i)$	b_i	$f'(b_i)$
-12	-704	4	5
-4	-29.6	4	5
-4	-29.6	0	3.66
-2	-1	0	3.66
-2	-1	-1	3.33
-2	-1	-1.5	1.79
-2	-1	-1.75	0.57
-1.875	-0.17	-1.75	0.57

Question 2.9 Analysez les résultats et commentez.

Correction :

Si on dessine la courbe de la dérivée de la fonction, on se rends compte qu'elle décroît entre 0 et 2 pour presque s'annuler au voisinage de $x = 2$. Les méthodes de Newton et de la sécante peuvent essayer de trouver ce point plutôt que le véritable minimum qui se trouve vers $x = -1.83$.