

Groupes de tresses

FRANÇOIS DIGNE

Bibliographie. Les principales références pour ce cours sont

[Bbk] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V, VI, Masson (1981).

[Del] P. Deligne, Les immeubles des groupes de tresses généralisés, *Inventiones math.* **17**, 273–302 (1972).

[Dy] M. Dyer, Reflection subgroups of Coxeter systems. *J. Algebra* **135** (1990), no. 1, 57–73.

[Mi] J. Michel, A note on words in braid monoids, *J. of Algebra*, **215** (1999) 366–377.

[VdL] H. Van der Lek, The homotopy type of complex hyperplane complements, *Thèse, Nijmegen* (1983).

1. Groupes de Coxeter. Dans ce chapitre nous allons considérer un groupe W engendré par un ensemble S d'éléments d'ordre 2. Tout élément de W s'écrit donc $w = s_1 s_2 \dots s_k$ pour une certaine suite (s_1, \dots, s_k) d'éléments de S . Si cette suite est de longueur minimale parmi les suites de produit w on dit qu'elle est réduite et que $w = s_1 \dots s_k$ est une écriture (ou une décomposition) réduite de w . L'entier k s'appelle la longueur de w , notée $l(w)$. Si s et s' sont deux éléments distincts de S et si ss' est d'ordre fini $m \geq 2$, on appelle relation de tresses l'égalité $ss's \dots = s'ss' \dots$, où le nombre de facteurs dans les deux membres est m .

DÉFINITION 1.1. Soit S un ensemble;

(i) On appelle **matrice de Coxeter** indexée par S une matrice symétrique $(m_{ss'})$ où les coefficients sont des éléments de $\mathbb{N}^* \cup \infty$ tels que $m_{ss'} = 1$ si et seulement si $s = s'$.

(ii) Étant donnée une matrice de Coxeter comme dans (i), on considère le groupe W donné par la présentation

$$W = \langle S \mid s^2 = 1, \underbrace{ss's \dots}_{m_{ss'}} = \underbrace{s'ss' \dots}_{m_{ss'}} \text{, pour } s, s' \in S \rangle,$$

et on dit que (W, S) est un **système de Coxeter** si dans W l'élément ss' est d'ordre $m_{ss'}$ pour tout couple d'éléments distincts (s, s') de S .

On dit aussi que W est un groupe de Coxeter, bien que ceci n'ait de sens que si on a un ensemble générateur S . Nous verrons dans le chapitre 2 que toute matrice de Coxeter donne

lieu à un groupe de Coxeter c'est-à-dire que la condition sur l'ordre de ss' est toujours vraie. En particulier les éléments de S sont tous distincts dans W ce qui justifie l'abus de notation consistant à identifier S à son image dans W . Les éléments de S sont appelés des réflexions élémentaires ou des réflexions simples. On appelle réflexions les conjugués des éléments de S dans W . L'ensemble des réflexions est noté R .

THÉORÈME 1.2. *Si W est un groupe engendré par un ensemble S d'éléments d'ordre 2, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) (W, S) est un système de Coxeter.
- 2) Si (s_1, s_2, \dots, s_k) est une suite réduite d'éléments de S et si $s \in S$ est tel que la suite (s, s_1, \dots, s_k) n'est pas réduite alors il existe un indice i tel que $s_1 s_2 \dots s_k = s s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_k$.

De plus quand ces deux conditions sont satisfaites on a

- 3) *On peut obtenir toutes les écritures réduites d'un élément de W à partir d'une d'elles en appliquant uniquement des relations de tresses.*

La propriété 2) s'appelle la propriété d'échange (ou lemme d'échange). Notons que dans cette propriété les deux membres sont des écritures réduites. Nous utiliserons la notation $(s_1, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_k)$ (resp. pour $s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k$) pour désigner la sous-suite où l'on a retiré le terme s_i (resp. le produit de cette sous-suite). Avant de démontrer ce théorème nous introduisons une définition qui sera fondamentale dans la suite et le lemme qui la justifie. Si (s_1, \dots, s_k) est une suite d'éléments de S on note

$$R(s_1, \dots, s_k) = (s_1, s_1 s_2 s_1, \dots, s_1 s_2 \dots s_i \dots s_2 s_1, \dots).$$

On note $N(s_1, \dots, s_k)$ l'ensemble des éléments qui apparaissent un nombre impair de fois dans $R(s_1, \dots, s_k)$.

LEMME 1.3. *L'ensemble $N(s_1, \dots, s_k)$ ne dépend que du produit $s_1 \dots s_k$ et pas de la suite. La suite (s_1, \dots, s_k) est réduite si et seulement si tous les éléments de $R(s_1, \dots, s_k)$ sont distincts.*

DÉFINITION 1.4. *Si $w = s_1 \dots s_k$ nous posons $N(w) = N(s_1, \dots, s_k)$.*

Le lemme implique que ceci a un sens et que $|N(w)| = l(w)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME : On passe d'une écriture de w comme produit d'éléments de S à une autre en appliquant soit une relation de tresses soit une relation du type $s^2 = 1$. Il suffit donc de vérifier que $N(s_1, \dots, s_k)$ est invariant par ces deux types de relations. Soit $s \in S$, la suite $R(s_1, \dots, s_i, s, s, s_{i+1}, \dots, s_k)$ contient les mêmes éléments que $R(s_1, \dots, s_k)$ avec même multiplicité, plus deux fois l'élément $s_1 s_2 \dots s_i s s_i \dots s_2 s_1$. Le nombre d'éléments intervenant un nombre impair de fois n'a donc pas changé. Regardons le cas d'une relation de tresses. Il faut comparer $R(s_1, \dots, s_i, \underbrace{s, t, s}_{m_{s,t}}, s_j \dots s_k)$ et $R(s_1, \dots, s_i, \underbrace{t, s, t}_{m_{s,t}}, s_j \dots s_k)$. Comme les produits $\underbrace{sts}_{m_{s,t}} \dots$ et $\underbrace{tst}_{m_{s,t}} \dots$ sont égaux, les i premiers éléments et les $k - j + 1$ derniers éléments des deux suites sont les mêmes. Les autres

éléments de $R(s_1, \dots, s_i, \underbrace{s, t, s, \dots}_{m_{s,t}}, s_j \dots s_k)$ et de $R(s_1, \dots, s_i, \underbrace{t, s, t, \dots}_{m_{s,t}}, s_j \dots s_k)$ sont les conjugués par $s_1 s_2 \dots s_i$ de $\underbrace{st \dots s}_x$ et de $\underbrace{ts \dots t}_x$ respectivement, pour $x = 1, 3, 5, \dots, 2m_{s,t}i -$

1. Or $\underbrace{st \dots s}_x = \underbrace{ts \dots t}_y$ si $x + y = 2m_{s,t}$, d'où la première assertion du lemme.

Si le i -ème et le j -ème termes de $R(s_1, \dots, s_k)$ sont égaux avec $i < j$ on a $s_i s_{i+1} \dots s_j = s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{j-1}$, donc $s_1 \dots s_k = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_k$, donc la suite (s_1, \dots, s_k) n'est pas réduite. Donc si la suite est réduite tous les éléments de $R(s_1, \dots, s_k)$ sont distincts et figurent dans $N(s_1, \dots, s_k)$. En particulier celui-ci est de cardinal $k = l(s_1 \dots s_k)$. Réciproquement si $w = s_1 \dots s_k$ et que tous les éléments de $R(s_1, \dots, s_k)$ sont distincts ce sont exactement les éléments de $N(s_1, \dots, s_k)$. Leur nombre est donc $l(w)$ c'est-à-dire que $k = l(w)$ ou encore que la suite est réduite. ■

DÉMONSTRATION DE 1.2 : Nous démontrons que 1) implique 2) implique 3) et que 2) et 3) impliquent 1).

Soit (s_1, \dots, s_k) une suite réduite d'éléments de S et w son produit. Si la suite (s, s_1, \dots, s_k) n'est pas réduite alors les éléments de $R(s, s_1, \dots, s_k)$ ne sont pas tous distincts. Comme ceux de $R(s_1, \dots, s_k)$ sont distincts on a donc $s \in sN(w)s$. et, comme on l'a vu au cours de la démonstration du lemme précédent, on a $ss_1 \dots s_k = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k$ ce qui est la propriété 2).

Montrons que 2) implique 3). On montre par récurrence sur la longueur de w qu'on passe d'une écriture réduite de w à une autre uniquement par relations de tresses. Si $l(w) = 0$ il n'y a qu'une écriture réduite de $w = 1$. En général, soient (s_1, \dots, s_k) et (t_1, \dots, t_k) deux suites réduites d'éléments de S de produit égal à w . Comme on a $t_1 s_1 s_2 \dots s_k = t_2 \dots t_k$, la suite (t_1, s_1, \dots, s_k) n'est pas réduite et par la propriété 2) on en déduit que $t_2 \dots t_k = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k$. Les deux membres de cette égalité sont des écritures réduites de longueur $k - 1$; par hypothèse de récurrence on peut donc passer de l'une à l'autre par des applications répétées de relations de tresses. On est ramené à voir qu'on peut passer de (s_1, \dots, s_k) à $(t_1, s_1, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_k)$ par des relations de tresses. Si $i \neq k$ on termine en appliquant encore l'hypothèse de récurrence : les deux suites (s_1, \dots, s_i) et $(t_1, s_1, \dots, s_{i-1})$ ont même produit, sont réduites et de longueur strictement inférieure à k . Il reste donc à traiter le cas où $i = k$, c'est-à-dire qu'on doit considérer les deux suites (s_1, \dots, s_k) et $(t_1, s_1, \dots, s_{k-1})$. On peut répéter l'argument précédent en commençant par remarquer que la suite $(s_1, t_1, s_1, \dots, s_{k-1})$ n'est pas réduite. On se ramènera alors à traiter le cas des deux suites $(s_1, t_1, s_1, \dots, s_{k-2})$ et $(t_1, s_1, \dots, s_{k-1})$. On peut itérer cet argument jusqu'à aboutir aux deux suites $(s_1, t_1, s_1, t_1, \dots)$ et $(t_1, s_1, t_1, s_1, \dots)$. Il faut voir qu'on passe de l'une à l'autre par une relation de tresses, c'est à dire que k est exactement l'ordre de $s_1 t_1$. Or par construction ces deux suites sont réduites et ont même produit. Ce qui signifie exactement que k est l'ordre de $s_1 t_1$.

Montrons que 2) et 3) impliquent 1). La propriété 1) signifie que si G est un groupe et si f est une application de S dans G telle que pour tout $s \in S$ on a $f(s)^2 = 1$ et pour

tout s et tout t dans S on a $(f(s)f(t))^{m_{s,t}} = 1$, où $m_{s,t}$ est l'ordre de st dans W , alors f se prolonge en un homomorphisme de groupes $W \rightarrow G$. On sait par 3) qu'on peut poser $f(w) = f(s_1) \dots f(s_k)$ si (s_1, \dots, s_k) est une suite réduite de produit w , puisqu'on passe d'une telle suite à une autre par des relations de tresses et que les relations correspondantes sont vérifiées par les images dans G des éléments de S . Il reste à voir que f est un homomorphisme. Il suffit de vérifier que pour tout $s \in S$ et tout $w \in W$ on a $f(sw) = f(s)f(w)$. Soit (s_1, \dots, s_k) une suite réduite de produit w . Si (s, s_1, \dots, s_k) est réduite la propriété est vraie par définition de f . Sinon, par 2) il existe i tel que $(s, s_1, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_k)$ soit une suite réduite de produit w , donc $f(w) = f(s)f(s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k)$ et, comme $f(s)^2 = 1$ et $s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k = ss_1 \dots s_k = sw$, on obtient le résultat. ■

COROLLAIRE 1.5. *Si (W, S) est un système de Coxeter et si v et w sont dans W on a $N(vw) = N(v) \dot{+} vN(w)v^{-1}$, où $\dot{+}$ désigne l'opérateur de différence symétrique sur les parties de R .*

DÉMONSTRATION : Comme la différence symétrique est associative, il suffit de vérifier cette égalité pour $v = s \in S$. Dans ce cas c'est une conséquence immédiate de la propriété d'échange et de la définition de $N(w)$. ■

On déduit aussi de ce corollaire ou de la propriété d'échange que pour $s \in S$ et $w \in W$ on a $l(sw) = l(w) \pm 1$. On a bien sûr le même résultat pour le produit ws (en utilisant le passage à l'inverse par exemple, qui coïncide d'ailleurs avec le retournement des produits d'éléments de S).

EXEMPLE. On peut montrer que le groupe symétrique S_n est un groupe de Coxeter si on prend pour S l'ensemble des transpositions d'entiers consécutifs. Un élément de R est une transposition (i, j) quelconque. On montre que $N(w)$ est l'ensemble des (i, j) tels que $i < j$ et $w^{-1}(i) > w^{-1}(j)$ (inversions de w^{-1}). On peut alors montrer la propriété d'échange, ce qui démontre qu'on a bien un système de Coxeter.

Dans toute la suite (W, S) désignera un système de Coxeter.

DÉFINITION 1.6. *On dit qu'un sous-groupe de W est un **sous-groupe parabolique standard** s'il est engendré par une partie I de S . On le note W_I .*

Notons que si $w = s_1 \dots s_k \in W_I$ (avec $s_i \in I$), alors $R(s_1, \dots, s_k)$, donc $N(w)$, ne contient que des éléments conjugués aux éléments de I dans le groupe W_I . Une écriture réduite dans W_I est donc aussi une écriture réduite dans W . On en déduit que la propriété d'échange est vraie dans W_I pour l'ensemble générateur I , donc que (W_I, I) est un système de Coxeter.

DÉFINITION 1.7. *Soit $I \subset S$. On dit qu'un élément $w \in W$ est **I -réduit** si $l(sw) = l(w) + 1$ pour tout $s \in I$.*

PROPOSITION 1.8. *Soit $I \subset S$; alors $w \in W$ est I -réduit si et seulement si une des deux propriétés suivantes est vraie :*

- 1) w est de longueur minimum dans la classe à droite $W_I w$.

2) Pour tout $v \in W_I$ on a $l(vw) = l(v) + l(w)$.

DÉMONSTRATION : Il est clair que 2) implique 1) qui implique que w est I -réduit. Montrons qu'un élément I -réduit vérifie 2). Si w est I -réduit et s'il existe $v \in W_I$ tel que $l(vw) \neq l(v) + l(w)$, choisissons une suite réduite (s_h, \dots, s_2, s_1) d'éléments de I de produit v et une suite réduite (t_1, \dots, t_k) d'éléments de S de produit w . Soit i le premier indice tel que $(s_i, \dots, s_1, t_1, \dots, t_k)$ ne soit pas réduite. Par la propriété d'échange on a $s_i \dots s_1 w = s_{i-1} \dots s_1 \hat{w}$ où $\hat{w} = t_1 \dots \hat{t}_j \dots t_k$ pour un certain j car $(s_i \dots s_1)$ est réduite, donc la réflexion simple à supprimer dans la propriété d'échange n'est pas un des s_l . On en déduit que $w = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i-1} \dots s_1 \hat{w}$. Or $s_i s_{i-1} \dots s_1 \hat{w} = s_{i-1} \dots s_1 w$ est de longueur $l(w) - 1 + i$ par hypothèse. On peut donc appliquer la propriété d'échange exactement $i - 1$ fois dans le produit de cet élément par $s_1 \dots s_{i-1}$ et aboutir à une écriture réduite de w . Celle-ci commencera nécessairement par s_i pour un certain l , ce qui est contraire au fait que w est I -réduit. ■

REMARQUE. La propriété 2) de la proposition précédente montre que w est l'unique élément de longueur minimum dans sa classe à droite modulo W_I .

NOTATION. Pour $w \in W$ et $I \subset S$, on pose $\alpha_I(w) = v$ où v est tel que $w = vw_1$ et w_1 est le représentant I -réduit de la classe $W_I w$.

2. Représentation géométrique d'un groupe de Coxeter; cône de Tits. Une grande partie des résultats de ce chapitre est exposée dans [Bbk, chapitre V]. Notre premier objectif est de prouver la propriété annoncée après 1.1; précisément :

THÉORÈME 2.1. *Soit M une matrice de Coxeter indexée par un ensemble S et soit W le groupe donné par la présentation*

$$W = \langle S \mid s^2 = 1, \underbrace{ss's \dots}_{m_{ss'}}, \underbrace{s'ss' \dots}_{m_{s's'}} \rangle, \text{ pour } s, s' \in S \rangle;$$

alors (W, S) est un système de Coxeter, c'est-à-dire que ss' est d'ordre $m_{ss'}$ pour tout s et tout s' dans S .

Pour démontrer ce résultat nous allons utiliser la représentation géométrique d'un tel groupe, que nous construisons maintenant. On considère un espace vectoriel E réel de base (e_s) indexée par S . Sur E on définit une forme bilinéaire symétrique par $B_M(e_s, e_{s'}) = -\cos(\pi/m_{ss'})$ (ce qui signifie -1 quand $m_{ss'} = \infty$). Pour tout $s \in S$, on définit un endomorphisme de E par $\sigma_s(x) = x - 2B_M(e_s, x)e_s$, pour $x \in E$. Comme $B_M(e_s, e_s) = 1$ l'orthogonal de e_s pour la forme B_M est un hyperplan supplémentaire de la droite définie par e_s et σ_s est la réflexion par rapport à cet hyperplan de direction e_s .

PROPOSITION 2.2. *Pour s et s' dans S , l'ordre de $\sigma_s\sigma_{s'}$ est $m_{ss'}$.*

DÉMONSTRATION : Si $m_{ss'}$ est infini on a $\sigma_s\sigma_{s'}(e_s) = \sigma_s(e_s + 2e_{s'}) = e_s + 2(e_s + e_{s'})$ et $\sigma_s\sigma_{s'}(e_{s'}) = \sigma_s(-e_{s'}) = -e_{s'} - 2e_s$, donc $e_s + e_{s'}$ est fixe par $\sigma_s\sigma_{s'}$ et $(\sigma_s\sigma_{s'})^k = 2k(e_s + e_{s'}) + e_s$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ceci montre que $\sigma_s\sigma_{s'}$ est d'ordre infini.

Si $m_{ss'}$ est fini, définissons un produit scalaire euclidien dans le plan engendré par e_s et $e_{s'}$ de façon que ces deux vecteurs soient de norme 1 et que leur angle soit $\pi - \pi/m_{ss'}$. La restriction de B_M à ce plan est égale à ce produit scalaire et la restriction de $\sigma_s\sigma_{s'}$ à ce plan est donc la rotation d'angle $2\pi/m_{ss'}$ qui est d'ordre $m_{ss'}$. Comme $\sigma_s\sigma_{s'}$ est l'identité sur le supplémentaire de ce plan intersection des deux hyperplans des réflexions σ_s et $\sigma_{s'}$, on obtient bien que $\sigma_s\sigma_{s'}$ est d'ordre $m_{ss'}$. ■

PREUVE DU THÉORÈME 2.1 : Considérons le sous-groupe de $GL(E)$ engendré par les σ_s pour $s \in S$. Comme les relations de définition de W sont vérifiées par les σ_s ce sous-groupe est un quotient de W , par définition d'une présentation. Mais comme $m_{ss'}$ est l'ordre de l'image de ss' dans ce quotient, le produit ss' est nécessairement d'ordre $m_{ss'}$ aussi. ■

Remarquons que la forme B_M est invariante par l'action de $\rho(W)$, où ρ désigne la représentation $W \rightarrow GL(E)$ obtenue. Nous allons montrer que cette représentation est fidèle, c'est-à-dire que l'homomorphisme ρ est injectif. Pour cela, suivant les idées de Tits, nous allons introduire le système d'hyperplans associé à W . Dans la suite on omettra ρ de la notation et on notera wx ou $w(x)$ pour l'image d'un élément x de E ou E^* par l'action de $w \in W$.

On considère l'espace dual E^* sur lequel on fait agir W par la représentation contragrédiente (inverse du transposé), c'est-à-dire que si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le couplage $E^* \times E \rightarrow \mathbb{R}$ on a $\langle wx, y \rangle = \langle x, w^{-1}y \rangle$ pour tout $x \in E^*$ et tout $y \in E$.

Pour $s \in S$ on définit l'hyperplan $M_s = \{x \in E^* \mid \langle x, e_s \rangle = 0\}$. On note D_s le demi-espace défini par $\{x \in E^* \mid \langle x, e_s \rangle > 0\}$ et pour $I \subset S$ on pose $D_I = \bigcap_{s \in I} D_s$. On note $C = \bigcap_{s \in S} (D_s)$. On a $\overline{D_s} = \{x \in E^* \mid \langle x, e_s \rangle \geq 0\}$ et $\overline{C} = \bigcap_{s \in S} \overline{D_s}$. Pour $I \subset S$ on note $C_I = (\bigcap_{s \in S-I} D_s) \cap (\bigcap_{s \in I} M_s)$. Il est clair que $C_\emptyset = C$ et que $\overline{C} = \coprod_{I \subset S} C_I$ (union disjointe). On appelle C la chambre fondamentale et on appelle chambres les transformés de C par W . On appelle **murs** les transformés des M_s par W . On appelle **facettes** les transformés des C_I ($I \subset S$) par W . Nous verrons dans 2.6 qu'une facette donnée est transformée de C_I pour un unique I . Tous les objets que nous venons de définir sont des cônes convexes au sens qu'ils sont convexes et stables par multiplication par un scalaire strictement positif quelconque. On appelle cône de Tits la réunion $U = \cup_{w \in W} w(\overline{C})$. Ce sera notre principal objet d'étude.

Le théorème suivant appelé théorème de Tits implique la fidélité de la représentation.

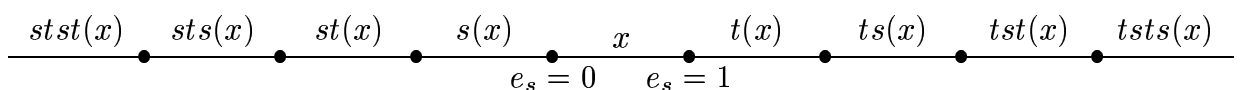
THÉORÈME 2.3. *Si $w \in W$ vérifie $w(C) \cap C \neq \emptyset$ alors $w = 1$*

DÉMONSTRATION : Nous montrons d'abord le lemme suivant qui servira plusieurs fois dans la suite.

LEMME 2.4. *Soit $I \subset S$; alors pour tout $w \in W$ on a $w(C) \subset \alpha_I(w)D_I$.*

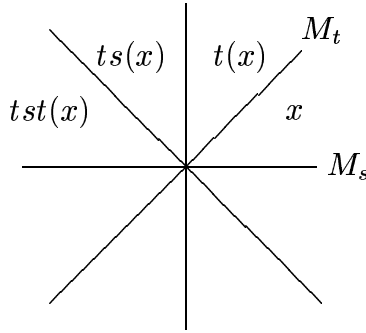
DÉMONSTRATION : Faisons une récurrence sur $l(w)$. Si $w = 1$ le résultat est vrai car $\alpha_I(w) = 1$. Passons à l'étape générale de la récurrence et faisons deux cas suivant que $\alpha_I(w) = 1$ ou non. Si $\alpha_I(w) \neq 1$ alors $w = \alpha_I(w)w'$ avec $l(w') < l(w)$ et par définition $\alpha_I(w') = 1$. On en déduit par hypothèse de récurrence que $w'(C) \subset D_I$, donc $w(C) = \alpha_I(w)w'(C) \subset \alpha_I(w)D_I$. Supposons maintenant que $\alpha_I(w) = 1$. Le cas où I est de cardinal au moins 2 se ramène au cas de cardinal 1 car si $\alpha_I(w) = 1$ alors $\alpha_s(w) = 1$ pour tout $s \in I$. Si on connaît le résultat pour le cas de cardinal 1 on en déduit $w(C) \subset D_s$ pour tout $s \in I$, donc $w(C) \subset \bigcap_{s \in I} D_s = D_I$. Il reste à traiter le cas où $I = \{s\}$ et $\alpha_I(w) = 1$. Il existe alors $t \neq s$ tel que $w = tw_1$ avec $l(w_1) = l(w) - 1$. Écrivons $w = \alpha_{\{s,t\}}(w)w'$. On a $l(w') < l(w)$. Par hypothèse de récurrence $w'(C) \subset D_{\{s,t\}}$. Donc $w(C) \subset \alpha_{\{s,t\}}(w)D_{\{s,t\}}$. Comme $\alpha_{\{s\}}(w) = 1$ on a nécessairement $\alpha_{\{s,t\}}(w) = tst \dots$ où le nombre de facteurs est strictement inférieur à m_{st} . On veut montrer que $\underbrace{tst \dots}_{< m_{st}} D_{\{s,t\}} \subset D_s$. On est donc ramené

à une question en dimension 2, dans le plan engendré par les éléments e_s^* et e_t^* de la base duale. Considérons d'abord le cas où m_{st} est infini. On a vu au cours de la démonstration de 2.2 que dans ce cas s et t agissent respectivement par les matrices $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base (e_s^*, e_t^*) . Donc la droite $e_s + e_t = 1$ est fixe par s et t . Les intersections de D_s et D_t respectivement avec cette droite sont données par $e_s > 0$ et $e_s < 1$ et $D_{\{s,t\}}$ coupe cette droite suivant l'intervalle $0 < e_s < 1$. Sur cette droite s est la symétrie par rapport au point $e_s = 0$ et t est la symétrie par rapport au point $e_s = 1$. On a donc la figure suivante sur la droite d'équation $e_s + e_t = 1$:



Ce qui montre bien que si $x \in D_{\{s,t\}}$ on a $tst \dots (x) \in D_s$.

Considérons maintenant le cas où m_{st} est fini. Dans ce cas on peut munir le plan d'un produit scalaire euclidien de façon que les intersections de M_s et M_t avec le plan soient deux droites faisant un angle π/m_{st} et que s et t soient les symétries orthogonales par rapport à ces deux droites. Alors $\underbrace{tst \dots}$ est soit une rotation d'angle strictement inférieur à $(m_{st} - 1) \frac{\pi}{m_{st}}$ soit le composé d'une rotation d'angle strictement inférieur à $(m_{st} - 2) \frac{\pi}{m_{st}}$ et de la symétrie par rapport à M_t . Dans les deux cas un point de $D_{\{s,t\}}$ est envoyé dans D_s (voir figure ci-dessous dans le cas $m_{st} = 4$).



□

Terminons maintenant la démonstration du théorème de Tits. Si $w \neq 1$ il existe $s \in S$ tel que $\alpha_s(w) = \{s\}$. Alors par le lemme 2.4 on a $w(C) \subset sD_s = -D_s$. Comme $C \subset D_s$ et que $D_s \cap -D_s = \emptyset$ on a bien $w(C) \cap C = \emptyset$. ■

Donnons quelques conséquences du théorème de Tits.

COROLLAIRE 2.5.

- 1) La représentation ρ est fidèle (de même que sa contragrédiente).
- 2) L'image de W est un sous-groupe discret de $GL(E^*)$.
- 3) Pour tout mur M et toute chambre $w(C)$ on a $w(C) \cap M = \emptyset$.

DÉMONSTRATION : La première assertion est claire. Comme C est ouvert, pour x fixé l'ensemble $\{g \in GL(E^*) \mid g(x) \in C\}$ est ouvert et par le théorème de Tits ne rencontre l'image de W qu'en l'identité, d'où 2). Pour démontrer 3), en utilisant l'action de W on est ramené à montrer qu'aucun mur ne rencontre C . Si $z \in w(M_s) \cap C$ alors l'élément $ws w^{-1}$ fixe z donc par le théorème de Tits $ws w^{-1} = 1$ ce qui est impossible, d'où 3). ■

Nous donnons maintenant une généralisation de 2.3.

PROPOSITION 2.6. Soient I et J deux parties de S . Si $w \in W$ vérifie $w(C_I) \cap C_J \neq \emptyset$ alors $I = J$ et $w \in W_I$.

Le cas $I = \emptyset$ de cette proposition est le théorème de Tits.

DÉMONSTRATION : On prouve ce résultat par récurrence sur $l(w)$. Si $w = 1$ le résultat est vrai car C_I et C_J sont disjoints à moins que $I = J$ par définition. En général on écrit $w = sw'$ avec $l(w') < l(w)$ et $s \in S$. Par le lemme 2.4 on a $w(C) \subset -D_s$ donc $w(\overline{C}) \subset -\overline{D}_s$. Donc $w(C_I) \cap C_J \subset w(\overline{C}) \cap \overline{C} \subset -\overline{D}_s \cap D_s = M_s$. Par définition, si C_J

rencontre M_s on a $s \in J$ (et même $C_J \subset M_s$). D'autre part comme s est l'identité sur M_s on a $w(C_I) \cap C_J = w'(C_I) \cap C_J \neq \emptyset$. Par hypothèse de récurrence appliquée à w' on obtient $I = J$ et $w' \in W_I$, donc aussi $w \in W_I$ puisque $s \in J = I$. ■

Cette proposition nous permet de donner la définition suivante :

DÉFINITION 2.7. On appelle **type** d'une facette l'unique partie $I \subset S$ telle que la facette s'écrive $w(C_I)$ avec $w \in W$.

PROPOSITION 2.8. Pour s et t dans S et $w \in W$ on a $w(M_s) = M_t$ si et seulement si $ws w^{-1} = t$.

DÉMONSTRATION : On a $w(M_s) = \{x \in E^* \mid \langle x, we_s \rangle = 0\}$ et $M_t = \{x \in E^* \mid \langle x, e_t \rangle = 0\}$. Donc $w(M_s) = M_t$ si et seulement si $w(e_s) = \lambda e_t$ pour un certain scalaire $\lambda \neq 0$. Comme e_t engendre le sous-espace propre de t pour la valeur propre -1 , ceci est équivalent à $tw(e_s) = -w(e_s)$. Si $w^{-1}tw = s$ on a bien $tw(e_s) = ws(e_s) = -w(e_s)$, d'où l'implication dans un sens. Réciproquement si $tw(e_s) = -w(e_s)$, comme dans E l'action de $w^{-1}tw$ est la réflexion de direction $w^{-1}(e_t)$ par rapport à l'hyperplan $\{x \in E \mid B_M(x, w^{-1}(e_t)) = 0\}$ (ceci utilise l'invariance de la forme B_M par l'action de W), on obtient que $w^{-1}tw$ et s ont même action sur E et par fidélité de la représentation on a $w^{-1}tw = s$. ■

COROLLAIRE 2.9. L'ensemble des murs est en bijection avec l'ensemble R des réflexions, le mur $w(M_s)$ correspondant à la réflexion $ws w^{-1}$.

DÉMONSTRATION : La proposition 2.8 prouve que l'application $ws w^{-1} \mapsto w(M_s)$ est bien définie et injective. Elle est surjective par définition des murs. ■

Donnons trois conséquences de la proposition 2.6.

COROLLAIRE 2.10. Si $I \subset S$ et $x \in C_I$ alors $\text{Stab}_W(x) = W_I$.

DÉMONSTRATION : Comme la restriction de tout $s \in I$ à C_I est l'identité, on a $W_I \subset \text{Stab}_W(x)$. Réciproquement, par la proposition 2.6, si $w(x) = x$ avec $x \in C_I$ on a $w \in W_I$, d'où le résultat. ■

COROLLAIRE 2.11. \overline{C} est un domaine fondamental pour l'action de W dans le cône de Tits U .

DÉMONSTRATION : Cela signifie que pour tout x de U il existe un unique $y \in \overline{C}$ dans l'orbite de x sous W . Par définition de U un tel y existe. Il faut voir l'unicité, c'est-à-dire que si y et wy sont dans \overline{C} ils sont égaux. Comme $\overline{C} = \cup_I C_I$ on a $y \in C_I$ et $wy \in C_J$ et la proposition 2.6 montre que $I = J$ et que $w \in W_I$, donc $wy = y$. ■

COROLLAIRE 2.12. Le seul mur séparant C et $s(C)$ est M_s .

DÉMONSTRATION : Comme $C \subset D_s$ et $sC \subset -D_s$, le mur M_s sépare C et sC et, par 2.4, appliqué avec $I = \{t\}$ et $w = s$, aucun mur de la forme M_t avec $t \in S - \{s\}$ ne sépare C et sC . Soit $x \in C$; on a $sx \in sC$ et l'intervalle $]x, sx[$ coupe M_s en unique point z et ne coupe aucun M_t avec $t \in S - \{s\}$; en particulier cet intervalle est inclus dans

$D_{S-\{s\}}$. Donc $]x, z[\subset C$, et comme $sz = z$ on a $]z, sx[\subset sC$. Soit M un mur séparant C et sC ; ce mur doit couper $]x, sx[$ en un point qui est nécessairement z car aucun point d'une chambre n'est dans un mur. On a $z \in D_{S-\{s\}} \cap M_s = C_s$. Par la proposition 2.6, la réflexion correspondant à M , qui fixe z , est dans le groupe engendré par s , donc est égale à s et on a bien $M = M_s$. ■

Le résultat suivant donne l'interprétation géométrique de $N(w)$.

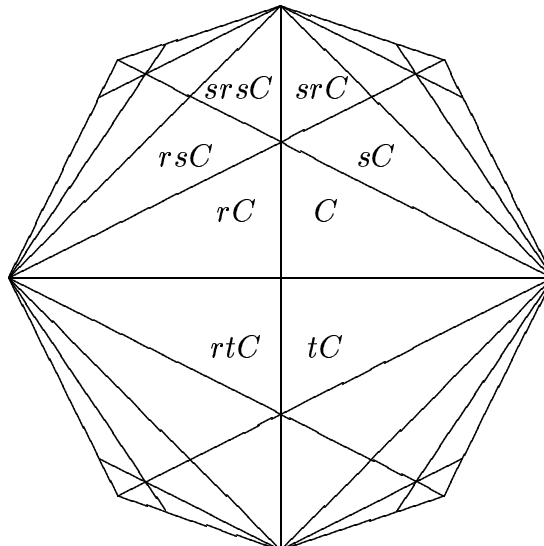
PROPOSITION 2.13. *Pour tout $w \in W$, les murs séparant C et $w(C)$ sont exactement les murs correspondants aux réflexions de $N(w)$.*

DÉMONSTRATION : On fait une récurrence sur $l(w)$. C'est vrai pour la longueur 0 de façon évidente et pour la longueur 1 par le corollaire précédent. Écrivons $w = sw'$ avec $l(w') = l(w) - 1$. Un mur sépare C et $w(C)$ si et seulement s'il sépare soit C et sC , soit sC et wC , et pas les deux. Un mur M sépare sC et wC si et seulement si sM sépare C et $w'C$, c'est-à-dire par hypothèse de récurrence si et seulement si sM correspond à une réflexion de $N(w')$, donc si et seulement si M correspond à une réflexion de $sN(w')s$. D'autre part le seul mur séparant C et sC est M_s et ce mur ne sépare pas sC et wC , par exemple par le lemme 2.4 qui implique $wC \subset -D_s$. On obtient donc que les murs séparant C et wC sont les murs correspondant à $\{s\} \cup sN(w')s$, et cet ensemble de réflexions est égal à $N(w)$ par 1.5. ■

Nous allons maintenant donner un certain nombre de propriétés topologique du cône de Tits.

PROPOSITION 2.14. *Les chambres sont les composantes connexes du complémentaire des murs dans le cône de Tits.*

DÉMONSTRATION : On sait que les chambres sont connexes et qu'elles sont incluses dans le complémentaire des murs. D'autre part deux chambres distinctes sont séparées par au moins un mur par 2.4, donc ne sont pas dans la même composante connexe. Comme le complémentaire des murs dans le cône de Tits est l'union des chambres, le résultat est démontré. ■



Intersection avec le plan $e_r + 2e_s + 2e_t = k > 0$ d'une portion du cône de Tits

$$\text{du groupe de Coxeter de matrice } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & \infty \\ 2 & \infty & 1 \end{pmatrix}$$

COROLLAIRE 2.15. *Le groupe W est fini si et seulement si son ensemble de réflexions est fini, c'est-à-dire si et seulement s'il y a un nombre fini de murs.*

DÉMONSTRATION : S'il y a un nombre fini de murs, le complémentaire des murs dans E^* a un nombre fini de composantes connexes. Or chaque chambre est connexe et deux chambres distinctes sont séparées par au moins un mur. Il y a donc un nombre fini de chambres donc un nombre fini d'éléments dans W . La réciproque est claire. ■

REMARQUE 2.16. Une réflexion r de W qui est dans W_I est une réflexion de W_I . En effet C et $r(C)$ sont séparées par le mur M_r correspondant à r , donc $r \in N(r)$. Or si $r \in W_I$, l'ensemble $N(r)$ est une partie des réflexions de W_I , donc r est bien une réflexion de W_I (c'est-à-dire que $r = wsw^{-1}$ avec $w \in W_I$ et $s \in I$).

PROPOSITION 2.17. *Deux points quelconques du cône de Tits ne sont séparés strictement que par un nombre fini de murs.*

DÉMONSTRATION : Par "strictement séparés" on veut dire que x et y sont chacun dans un des deux demi-espaces ouverts définis par le mur. Considérons deux chambres C_1 et C_2 telles que $x \in \overline{C_1}$ et $y \in \overline{C_2}$. Si un mur M sépare strictement x et y , par définition de l'adhérence, il existe des points de C_1 (resp. C_2) dans le même demi-espace ouvert que x (resp. y). Par convexité, le mur M sépare C_1 et C_2 . Or deux chambres ne sont séparées que par un nombre fini de murs d'après 2.13. D'où le résultat. ■

L'énoncé suivant donne le rapport entre la représentation géométrique d'un groupe de Coxeter et celle d'un sous-groupe parabolique.

PROPOSITION 2.18. *Si $I \subset S$, l'action de W_I induite sur le quotient $E^*/(\cap_{s \in I} M_s)$ est la représentation géométrique de W_I . Les murs dans cette représentation sont les images dans le quotient des murs $w(M_s)$ où $w \in W_I$ et $s \in I$.*

DÉMONSTRATION : La représentation géométrique de W_I est la représentation contragrédiente de la représentation de W_I dans le sous-espace E_I de E de base $(e_s)_{s \in I}$. Or E_I^* est canoniquement le quotient de E^* par l'intersection des noyaux des e_s pour $s \in I$, c'est-à-dire par l'intersection des murs M_s pour $s \in I$. L'action d'un élément de W_I est l'identité sur cette intersection, passe au quotient, et induit la transposée de l'inverse de l'action de W_I sur E_I . Les murs dans cet espace sont par définition les images par W_I des noyaux des e_s dans E_I^* , c'est-à-dire des images des $w(M_s)$ (pour $s \in I$ et $w \in W_I$) dans le quotient. ■

THÉORÈME 2.19. *Le cône de Tits est convexe.*

DÉMONSTRATION : Soient x et y deux points du cône de Tits U . Il faut voir que $[x, y] \subset U$. Par action de W on se ramène à $x \in \overline{C}$. On a $y \in w(\overline{C})$ pour un certain $w \in W$. On raisonne par récurrence sur $l(w)$. Si $y \in \overline{C}$, le segment $[x, y]$ est dans \overline{C} par convexité de \overline{C} et la propriété est démontrée. Ceci donne aussi le départ de la récurrence. Si $y \notin \overline{C}$, il existe au

moins un $s \in S$ tel que $e_s(y) < 0$. Un tel mur M_s coupe $[x, y[$ en un point. Considérons s tel que M_s coupe $[x, y[$ en un point z et qu'aucun des murs M_t pour $t \in S$ ne coupe $[x, z[$. On a $[x, z] \subset \overline{C}$ et $]z, y] \not\subset \overline{C}$, car \overline{C} est défini par les inéquations $(e_t \geq 0)_{t \in S}$. On a $e_s(y) < 0$, donc $w(C) \subset -D_s$, donc par le lemme 2.4 on a $w = sw'$ avec $l(w') = l(w) - 1$. On a $[x, z] \subset \overline{C} \subset U$. Il faut voir que $]z, y] \subset U$. Or s fixe z , donc $]z, y] = s(]z, sy])$ et $sy \in w'(\overline{C})$. Par hypothèse de récurrence on a $]z, sy] \subset U$ et comme $s(U) = U$ on obtient le résultat. ■

PROPOSITION 2.20. *Le groupe W est fini si et seulement si le cône de Tits est égal à tout l'espace E^* . Ceci est aussi équivalent au fait qu'il existe dans W un élément w_0 de longueur maximum. Cet élément est alors unique, de carré 1 et envoie chaque chambre sur son opposée. Sa longueur est le nombre de réflexions de W .*

DÉMONSTRATION : Si W est fini il existe un élément w_0 de longueur maximale. On a donc $l(sw_0) = l(w_0) - 1$ pour tout $s \in S$. Ceci signifie que $w_0(C) \subset -D_s$ pour tout $s \in S$, donc $w_0(C) \subset -C$. Comme les chambres sont dans l'intérieur U° de U et que cet intérieur est convexe, on obtient $0 \in U^\circ$, donc U contient un voisinage de l'origine et comme c'est un cône il est égal à E^* tout entier. Réciproquement si $U = E^*$, les chambres sont alors les composantes connexes du complémentaire des murs dans E^* , donc $-C$ est une chambre, donc $-C = w_0(C)$ pour certain w_0 . La longueur de w_0 est le nombre de murs séparant C et $-C$ c'est-à-dire tous les murs. L'élément w_0 est donc de longueur maximum et le groupe W est fini puisque les longueurs sont bornées. Si w'_0 est un autre élément de même longueur, les chambres C et $w'_0(C)$ sont séparées par tous les murs donc $w'_0(C) = -C$ et $w'_0 = w_0$. Ceci montre aussi que $w_0^{-1} = w_0$. ■

Décrivons maintenant l'intérieur du cône de Tits.

THÉORÈME 2.21. *L'intérieur du cône de Tits est l'ensemble des points de U dont le stabilisateur est fini.*

DÉMONSTRATION : Notons U_f l'ensemble des points de U de stabilisateur fini. Nous allons montrer que U_f est convexe ouvert dense dans U ce qui implique le résultat. Remarquons d'abord que U_f est aussi l'ensemble des points de U qui sont sur un nombre fini de murs. En effet tout point x de U est dans une unique facette $w(C_I)$. Le stabilisateur de x est wW_Iw^{-1} par 2.10. Les réflexions par rapport aux murs contenant $w(C_I)$ fixent x donc sont dans wW_Iw^{-1} . Donc x est sur un nombre fini de murs si et seulement si W_I contient un nombre fini de réflexions c'est-à-dire si et seulement si $\text{Stab}_W(x) = wW_Iw^{-1}$ est fini par 2.15.

La densité de U_f dans U résulte du fait que tout point de U est dans l'adhérence d'une chambre et que les chambres sont dans U_f puisqu'un point d'une chambre n'est sur aucun mur.

La convexité de U_f résulte du fait que deux points quelconques de U ne sont séparés strictement que par un nombre fini de murs (2.17). Or un intervalle $[x, y]$ ne rencontre que les murs contenant x et y ou les murs séparant strictement x et y . Donc si x et y sont dans U_f l'intervalle $[x, y]$ ne rencontre qu'un nombre fini de murs donc est dans U_f .

Montrons que U_f est ouvert. En utilisant l'action de W on est ramené à montrer que tout point $x \in \overline{C} \cap U_f$ a un voisinage dans U_f . Soit I tel que $x \in C_I$. Le groupe W_I est fini. Donc $\mathcal{O} = \bigcap_{s \in S-I} (\bigcap_{w \in W_I} w(D_s))$ est un ouvert. Cet ouvert contient x puisque $x \in D_s$ pour $s \in S - I$ et que x est fixe par W_I . Nous allons montrer que $\mathcal{O} \subset U_f$. Soit $y \in \mathcal{O}$. Comme W_I est fini le cône de Tits de ce groupe est tout l'espace, ce qui signifie que tout point de E^* s'écrit $w_1(z)$ modulo l'intersection $\bigcap_{s \in I} M_s$, pour un certain $w_1 \in W_I$ et un élément z tel que $\langle e_s, z \rangle \geq 0$ pour tout $s \in I$. Comme e_s est nul sur $\bigcap_{s \in I} M_s$, tout point de E^* s'écrit $w_1(z)$ avec w_1 et z comme ci-dessus. Appliquons ceci à y . On obtient $y \in \mathcal{O} \cap w_1(\bigcap_{s \in I} \overline{D_s}) \subset w_1((\bigcap_{s \in S-I} D_s) \cap (\bigcap_{s \in I} \overline{D_s}))$. Ce dernier ensemble est exactement $w_1(\bigcup_{J \subset I} C_J)$. Ceci montre à la fois que $y \in U$ et que le stabilisateur de y est de la forme $w_1 W_J w_1^{-1}$ avec $J \subset I$, donc est fini. ■

REMARQUE 2.22. On a vu au passage que l'ouvert \mathcal{O} ne rencontre qu'un nombre fini de murs. Donc tout point de U° a un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de murs. On dit que l'ensemble des murs est localement fini.

3. Groupe de tresses, monoïde de tresses, galeries dans le cône de Tits. Soit (W, S) un système de Coxeter. On définit le **groupe de tresses** B_W par la présentation

$$B_W = \langle S \mid \underbrace{ss's \dots}_{m_{s's'}} = \underbrace{s'ss' \dots}_{m_{s's'}}, \text{ pour } s, s' \in S \rangle .$$

On définit aussi le **monoïde de tresses** comme le monoïde donné par la présentation

$$B_W^+ = \langle S \mid \underbrace{ss's \dots}_{m_{s's'}} = \underbrace{s'ss' \dots}_{m_{s's'}}, \text{ pour } s, s' \in S \rangle .$$

Il s'agit d'une présentation en tant que monoïde, c'est-à-dire que B_W^+ est le quotient du monoïde libre engendré par S par la relation d'équivalence engendrée par ces relations. Par abus de langage nous notons de la même façon l'image de S dans le monoïde de tresses, dans le groupe de tresses ou dans le groupe de Coxeter. En envoyant les éléments de S sur leur image on obtient un morphisme de monoïdes i et un morphisme de groupes p :

$$B_W^+ \xrightarrow{i} B_W \xrightarrow{p} W.$$

D'autre part la propriété (3) de 1.2 permet de définir une application de $h : W \rightarrow B_W^+$: pour $w \in W$, on choisit une décomposition réduite de w et on la remonte dans B_W^+ . L'élément obtenu ne dépend pas de la décomposition choisie puisqu'on passe de l'une à l'autre par des relations de tresses et que celles-ci sont vraies dans B_W^+ . L'application h n'est pas un morphisme. Son image, notée B_W^{red} est formée des éléments $b \in B_W^+$ tels que $l(b) = l(p(i(b)))$ où l désigne la longueur dans B_W^+ et dans W respectivement, par rapport au système générateur S (le nombre minimum de termes dans une écriture d'un élément comme produit d'éléments de S). Comme le composé $p \circ i \circ h$ est l'identité de W , l'ensemble B_W^{red} est en bijection avec W et aussi avec $i(B_W^{\text{red}})$. Nous identifierons B_W^{red} et $i(B_W^{\text{red}})$. Ceci justifie aussi l'abus de notation sur S . En fait on a

THÉORÈME 3.1 (L. PARIS, 2001). *Le morphisme i est injectif.*

Nous démontrerons ce résultat dans un chapitre ultérieur, dans le cas où W est fini, cas où il est connu depuis longtemps. La contribution de L. Paris a été de le démontrer pour les groupes de Coxeter infinis. Nous dirons qu'un groupe de tresses B_W (ou le monoïde W ou le groupe de Coxeter W) est de **type sphérique**, où que l'ensemble S est sphérique, si W est fini. Pour la classification des cas sphériques nous renvoyons à [Bbk, Chapitre IV]. Le noyau de p est appelé le **groupe de tresses pur**, noté P_W . Le but de ce chapitre est d'interpréter le monoïde et le groupe de tresses en termes de "galeries" dans le cône de Tits.

DÉFINITION 3.2. *Une galerie de longueur $k \geq 0$ est une suite de chambres (C_0, C_1, \dots, C_k) telles que C_i et C_{i+1} sont **mitoyennes** pour tout $i < k$, c'est-à-dire séparées exactement par un mur. On appelle C_0 l'**origine** de la galerie et C_k le **but** de la galerie.*

On a une notion évidente de composition de deux galeries quand le but de la première est égal à l'origine de la seconde. Nous noterons GG' la composée des galeries G et G' .

Étant données deux chambres $w(C)$ et $w'(C)$, on sait par 2.13 que les murs qui les séparent sont les murs associés aux éléments de $N(w^{-1}w')$. Si les chambres sont mitoyennes, cet ensemble est de cardinal 1, donc $w^{-1}w' = s \in S$. Donc deux chambres mitoyennes sont de la forme $w(C)$ et $ws(C)$. On en déduit qu'une galerie est une suite de chambres de la forme $(w(C), ws_1(C), ws_1s_2(C), \dots, ws_1 \dots s_k(C))$ pour une certaine suite (s_1, s_2, \dots, s_k) d'éléments de S . Ceci définit une bijection entre galeries d'origine fixée et suites d'éléments de S . Remarquons que l'intersection des adhérences $w(\overline{C}) \cap ws(\overline{C})$ est égale à $w(\overline{C}_{\{s\}})$, adhérence de la facette de type s de $w(C)$ (et de $ws(C)$). Appelons **face** une facette de codimension 1. Nous dirons qu'une galerie traverse un mur M (resp. une face) si M est un murs séparant (resp. une face incluse dans l'intersection des adhérences de) deux chambres consécutives de la galerie. La suite associée à une galerie est donc la suite des types des faces traversées.

DÉFINITION 3.3. *On dit qu'une galerie est **réduite** si tous les murs traversés sont distincts.*

PROPOSITION 3.4.

- (1) *Une galerie est réduite si et seulement si la suite associée est une suite réduite.*
- (2) *Il existe toujours une galerie réduite d'origine et de but fixés.*

DÉMONSTRATION : En utilisant l'action de W sur les chambres on peut ramener toute galerie à une galerie d'origine C . Si $(s_1 \dots, s_k)$ est la suite associée, la galerie est $(C, s_1C, \dots, s_1s_2 \dots s_kC)$ et les murs traversés sont les murs associés à la suite de réflexions $(s_1, s_1s_2s_1, s_1s_2s_3s_2s_1, \dots)$, c'est-à-dire à la suite $R(s_1, \dots, s_k)$. La propriété (1) est donc une simple traduction de 1.3.

Étant données deux chambres $w(C)$ et $w'(C)$, si $w^{-1}w' = s_1 \dots s_k$ est une écriture réduite, la galerie d'origine $w(C)$ associée à la suite (s_1, \dots, s_k) est réduite et a pour but $w'(C)$, d'où (2). ■

On a donc bijection entre les galeries réduites d'origine donnée et les suites réduites d'éléments de S . Le but de la galerie ne dépend pas de la suite mais uniquement du produit de ses termes. Ceci incite à définir une relation d'équivalence sur les galeries. Nous appellerons **équivalence élémentaire de galeries** une relation de la forme $FGH \sim FG'H$, où F, G, G' et H sont des galeries et où il existe s et t dans S tels que la suite associée à G soit $\underbrace{st \dots}_{m_{st}}$ et la suite associée à G' soit $\underbrace{ts \dots}_{m_{st}}$.

DÉFINITION 3.5. *Nous dirons que deux galeries sont équivalentes si on passe de l'une à l'autre par une suite d'équivalences élémentaires.*

Deux galeries équivalentes ont même origine et même but. La relation d'équivalence est stable par action de W puisque cette action ne change pas la suite d'éléments de S associée à une galerie.

PROPOSITION 3.6. *Deux galeries réduites de même origine et même but sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION : Par action de W on se ramène à deux galeries d'origine C et de but $w(C)$ pour un certain $w \in W$. Alors par 3.4 les deux galeries correspondent à deux écritures

réduites de w et par 1.2, (3) on passe d'une écriture réduite à une autre par applications successives de relations de tresses, ce qui correspond à une suite d'équivalences élémentaires sur les galeries. ■

LEMME 3.7. *Étant donnée une chambre C_1 et une facette F de type sphérique dans l'adhérence de C_1 , il existe une unique chambre C_2 séparée de C_1 exactement par les murs contenant F . La facette F est alors aussi dans l'adhérence de C_2 .*

Dans cette situation on dit que C_1 et C_2 sont **opposées par rapport à F** .

DÉMONSTRATION : Par action de W on se ramène à $C_1 = C$ et $F = C_I$. Comme W_I est fini il contient un (unique) élément w_0^I de plus grande longueur. L'ensemble $N(w_0^I)$ est formé de toutes les réflexions de W_I donc C et $w_0^I(C)$ sont séparées exactement par les murs correspondant à ces réflexions, c'est-à-dire les murs contenant C_I par 2.10. D'autre part C_I est dans \overline{C} donc aussi dans $w_0^I(\overline{C})$ puisque w_0^I fixe C_I . ■

PROPOSITION 3.8. *Si F est une facette de codimension 2 et si C_1 et C_2 sont deux chambres opposées par rapport à F , il existe exactement deux galeries réduites de C_1 à C_2 . On passe de l'une à l'autre par une équivalence élémentaire de galeries.*

DÉMONSTRATION : On se ramène à $C_1 = C$. Comme F est de codimension 2 on a $F = C_{\{s,t\}}$ avec $s, t \in S$, distincts. On a alors $C_2 = \underbrace{st \dots}_{m_{st}}(C)$. Les galeries réduites de $C = C_1$ à C_2 correspondent bijectivement aux décompositions réduites de $\underbrace{st \dots}_{m_{st}}$. Or cet élément a exactement deux décompositions réduites; on passe de l'une à l'autre par la relation de tresses sur s et t ; d'où la proposition. ■

Les constructions précédentes nous donnent une bijection entre le monoïde de tresses B_W^+ et les classes de galeries d'origine C . L'image d'un élément de B_W^+ dans W correspond au but de la galerie. Si b et b' sont deux éléments de B_W^+ , et si l'image de b dans W est w , le produit bb' correspond à la composition de la galerie correspondant à b et de l'image par w de la galerie correspondant à b' .

Nous voulons maintenant interpréter de façon analogue le groupe de tresses B_W .

DÉFINITION 3.9. *Une **galerie avec signes** de longueur k est une suite $(C_0, \varepsilon_1, C_1, \varepsilon_2, C_2, \dots, \varepsilon_k, C_k)$ où (C_0, C_1, \dots, C_k) est une galerie dans U et où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ pour tout i .*

À une galerie avec signes on peut associer une suite d'éléments de $S \cup S^{-1}$: à la galerie est associée comme précédemment une suite (s_1, \dots, s_k) ; à la galerie avec signes on associe la suite $(s_1^{\varepsilon_1}, \dots, s_k^{\varepsilon_k})$. En faisant le produit des termes de cette suite, on en déduit une application de l'ensemble des galeries avec signes dans B_W .

LEMME 3.10. *L'application définie ci-dessus, restreinte aux galeries d'origine fixée, est surjective et deux galeries avec signes de même origine ont même image si et seulement si on passe de l'une à l'autre par une suite d'équivalences élémentaires de l'un des deux types ci-dessous :*

- (1) Remplacer dans une galerie avec signes une sous-suite $(C_i, \varepsilon, C_{i+1}, \dots, \varepsilon, C_{j-1}, \varepsilon, C_j)$ où tous les signes sont égaux par une sous-suite $(C_i, \varepsilon, C'_{i+1}, \dots, \varepsilon, C'_{j-1}, \varepsilon, C_j)$ quand les galeries sans signes sous-jacentes sont équivalentes par une relation élémentaire (correspondant à une relation de tresses).
- (2) Remplacer dans une galerie avec signes une sous-suite $(C', \varepsilon, C'', -\varepsilon, C')$ par (C') .

DÉMONSTRATION : L'application est clairement surjective. D'autre part les équivalences (1) et (2) traduisent exactement les relations de définition de B_W . ■

Nous appellerons **équivalence de galeries avec signes** la relation d'équivalence engendrée par les équivalences élémentaires de 3.10. Deux galeries avec signes équivalentes ont même origine et même but. Nous allons utiliser cette interprétation de B_W pour démontrer que le sous-groupe engendré par une partie $I \subset S$ est isomorphe au groupe de tresses associé à W_I . Pour cela nous commençons par affiner ce que nous avons dit plus haut sur le rapport entre cônes de Tits de W et de W_I .

On a vu dans 2.18 que pour $I \subset S$, si $L_I = \cap_{s \in I} M_s$, l'espace de la représentation géométrique de W_I est canoniquement isomorphe à E^*/L_I muni de l'action induite par W_I . Remarquons que L_I est le sous-espace vectoriel engendré par C_I . On sait que les murs de W_I sont les M_r/L_I où r est une réflexion de W_I et que les murs M_r avec $r \in W_I$ sont exactement les murs contenant L_I . (cf. corollaire 2.10 et remarque 2.16).

PROPOSITION 3.11.

- (1) La chambre fondamentale C_{W_I} (resp. l'adhérence de la chambre fondamentale) du cône de Tits U_{W_I} de W_I est l'image dans E^*/L_I de $C + L_I$ (resp. de $\overline{C} + L_I$).
- (2) Le cône de Tits U_{W_I} de W_I est l'image dans E^*/L_I de $U + L_I$.

DÉMONSTRATION :

- (1) La chambre fondamentale C_{W_I} est l'image de $\{x \in E^* \mid \langle e_s, x \rangle > 0 \text{ pour } s \in I\}$. Cette ensemble contient $C + L_I$. Montrons l'inclusion en sens inverse. Soit x tel que $\langle e_s, x \rangle > 0$ pour tout $s \in I$ et soit y fixé dans $C_I \subset L_I$. Alors $\langle e_s, x + \lambda y \rangle > 0$ pour tout $s \in I$, car $\langle e_s, y \rangle = 0$, et pour $s \in S - I$ on a $\langle e_s, x + \lambda y \rangle > 0$ si et seulement si $\lambda > -\frac{\langle e_s, x \rangle}{\langle e_s, y \rangle}$, car $\langle e_s, y \rangle > 0$. Comme $S - I$ est un ensemble fini on peut trouver un nombre réel λ vérifiant ces inégalités, d'où le résultat. Le même raisonnement s'applique à l'adhérence de la chambre fondamentale en remplaçant $\langle e_s, x \rangle > 0$ par $\langle e_s, x \rangle \geq 0$ pour $s \in I$.
- (2) Le cône de Tits U_{W_I} est l'union des images de \overline{C}_{W_I} par les éléments de W_I . D'après (1) il est donc dans l'image de $U + L_I$ car les éléments de W_I fixent L_I . Réciproquement, tout $w \in W$ s'écrit $\alpha(w)w_1$ avec w_1 I -réduit. Par le lemme 2.4 les chambres C et $w_1(C)$ ne sont séparées par aucun mur M_s avec $s \in I$. Le calcul fait pour prouver (1) montre que $w_1(C)$ est dans $C + L_I$ donc l'image de $w_1(\overline{C})$ est dans \overline{C}_{W_I} . L'image de $w(\overline{C})$ est donc dans $\alpha_I(\overline{C}_{W_I})$ qui est bien dans U_{W_I} . ■

La proposition précédente permet de définir une application “**image directe**” qui envoie les chambres de U sur celles de U_{W_I} : l'image d'une chambre est dans U_{W_I} et ne

rencontre aucun mur de U_{W_I} , donc est dans une chambre bien déterminée de U_{W_I} puisque les chambres sont les composantes connexes du complémentaire des murs dans le cône de Tits. Cette application est compatible avec l'action de W_I sur les chambres. Elle n'est pas injective, précisément :

PROPOSITION 3.12. *Les murs qui séparent les images directes dans U_{W_I} de deux chambres de U sont les murs M_r/L_I où r est une réflexion de W_I telle que M_r sépare les deux chambres. En particulier les deux chambres ont même image directe si et seulement si elles ne sont séparées par aucun mur correspondant à une réflexion de W_I .*

DÉMONSTRATION : Les chambres de U_{W_I} sont les composantes connexes du complémentaire des murs associés aux réflexions de W_I . Si r est une telle réflexion, une forme linéaire sur E^* qui définit M_r est nulle sur L_I , puisque M_r contient L_I donc induit sur le quotient une forme linéaire qui définit le mur M_r/L_I . Donc deux chambres sont séparées par M_r si et seulement si leurs images sont séparées par M_r/L_I . D'où le résultat. ■

Nous voulons définir une application dans l'autre sens telle que le composé soit l'identité sur l'ensemble des chambres de U_{W_I} . Ceci est possible grâce au lemme suivant.

LEMME 3.13. *Si C' est une chambre de U_{W_I} il existe une unique chambre de U dont l'adhérence contient C_I et dont l'image dans E^*/L_I est dans C' .*

DÉMONSTRATION : On a $C' = w(C_{W_I})$ pour un certain (unique) $w \in W_I$. La chambre $w(C)$ contient C_I dans son adhérence puisque $C_I \subset \overline{C}$ et que $w(C_I) = C_I$. Montrons l'unicité. Soient C_1 et C_2 deux chambres contenant C_I dans leur adhérence et dont l'image modulo L_I est dans C' . Tout mur qui sépare C_1 et C_2 contient C_I puisque chacun des deux demi-espaces fermés définis par ce mur contiennent C_I . Un mur qui contient C_I est le mur M_r d'une réflexion r de W_I , donc les images de C_1 et C_2 sont séparées par M_r/L_I . ■

On peut donc remonter de façon unique les chambres de U_{W_I} en chambres de U contenant C_I dans leur adhérence. Nous appellerons cette application "**l'image réciproque**". Le composé de l'image réciproque et de l'image directe est par définition l'identité sur l'ensemble des chambres de U_{W_I} .

REMARQUE. On appelle parfois **étoile de C_I** l'ensemble des facettes contenant C_I dans leur adhérence. On peut voir par les mêmes méthodes que le passage au quotient par L_I définit une bijection entre l'étoile de C_I et l'ensemble des facettes de U_{W_I} .

Nous voulons maintenant étendre ces deux applications aux galeries et aux galeries avec signes.

PROPOSITION 3.14. *Les images réciproques de deux chambres mitoyennes de U_{W_I} sont mitoyennes et le type de la face qui sépare deux chambres de U_{W_I} est le même que celui de la face qui sépare leurs images réciproques.*

DÉMONSTRATION : Comme vu dans la démonstration du lemme 3.13 les murs qui séparent deux chambres contenant C_I dans leur adhérence sont nécessairement des murs associés à une réflexion de W_I . La première assertion de la proposition est alors une conséquence

immédiate de 3.12. Deux chambres mitoyennes contenant C_I dans leur adhérence relèvent donc deux chambres de la forme $w(C_{W_I})$ et $ws(C_{W_I})$ avec $w \in W_I$ et $s \in I$. Ce sont donc les chambres $w(C)$ et $ws(C)$ d'après la démonstration de 3.13 et le type de la face qui les sépare est donc s , d'où la deuxième assertion. ■

Ce résultat permet de remonter les galeries en galeries et on peut étendre cette application aux galeries avec signes en conservant les signes. Nous pouvons ainsi définir l'image réciproque d'une galerie ou d'une galerie avec signes.

Dans l'autre sens, comme les images directes de deux chambres mitoyennes sont soit deux chambres mitoyennes soit égales suivant que le mur qui les sépare est ou n'est pas associé à une réflexion de W_I , la suite de chambres de U_{W_I} obtenue à partir d'une galerie de U est une "galerie avec répétition" c'est-à-dire telle qu'on obtient une galerie en ne conservant que la première chambre dans chaque sous-suite constante maximale. On définit ainsi l'image directe d'une galerie et on étend ceci aux galeries avec signes en conservant les signes qui précèdent une chambre qu'on a conservée. Les deux applications que nous venons de définir sur les galeries sont compatibles avec l'action de W_I et leur composé est l'identité sur les galeries de U_{W_I} .

PROPOSITION 3.15. *L'image directe et l'image réciproque des galeries (resp. des galeries avec signes) sont compatibles avec l'équivalence des galeries (resp. l'équivalence des galeries avec signes).*

DÉMONSTRATION : Il suffit de montrer que l'image directe et l'image réciproque sont compatibles avec les équivalences élémentaires. Montrons-le d'abord pour l'image réciproque. Si on a une équivalence élémentaire de deux galeries correspondant à une relation de tresses sur la suite des types des faces traversées, comme l'image réciproque conserve ces types, on a aussi une équivalence élémentaire pour les galeries relevées. De même pour les galeries avec signes car dans ce cas on demande que tous les signes soient égaux. L'autre type d'équivalence élémentaire pour les galeries avec signes consiste à remplacer $(C'_1, \varepsilon, C'_2, -\varepsilon, C'_1)$ par (C'_1) , et cette relation est bien compatible avec l'image réciproque, puisqu'on garde les signes.

Considérons maintenant l'image directe des galeries. Elle envoie une galerie réduite sur une galerie réduite, puisqu'une telle galerie est caractérisée par le fait que tous les murs traversés sont distincts et les murs traversés par l'image directe d'une galerie sont une partie des images des murs traversés par la galerie, à savoir ceux qui correspondent à une réflexion de W_I . Or une équivalence élémentaire consiste à remplacer une galerie réduite dont l'ensemble des types des faces traversées est $\{s, t\} \subset S$ et la longueur égale à m_{st} par l'autre galerie réduite de mêmes extrémités. Les images de ces deux galeries sont donc deux galeries réduites de mêmes extrémités, donc équivalentes. S'ils s'agit de deux galeries avec signes, tous les signes sont égaux et donc, comme on conserve les signes par l'image directe, les deux images directes sont des galeries avec signes constants et égaux et dont les galeries sous-jacentes sont équivalentes. Ce sont donc des galeries avec signes équivalentes. ■

Nous obtenons comme conséquence le théorème cherché.

THÉORÈME 3.16. *Les homomorphismes naturels $B_{W_I} \rightarrow B_W$ et $B_{W_I}^+ \rightarrow B_W^+$ induits par $I \subset S$ sont injectifs.*

DÉMONSTRATION : Remarquons que la deuxième assertion se déduit de la première si l'on utilise le théorème de Paris 3.1.

La proposition précédente montre que les applications image directe et image réciproque passent aux classes de galeries et aux classes de galeries avec signes. Or les classes de galeries (resp. les classes de galeries avec signes) d'origine C sont en bijection avec B_W^+ (resp. avec B_W) en associant à une galerie le produit des types des faces traversées (resp. à une galerie avec signes le produit des types des faces traversés affectés chacun d'un exposant égal au signe). L'image réciproque correspond par cette bijection à l'homomorphisme naturel $B_{W_I}^+ \rightarrow B_W^+$ (resp. $B_{W_I} \rightarrow B_W$) puisqu'elle conserve les types (resp. les types et les signes). Comme le composé de l'image réciproque et de l'image directe est l'identité sur les galeries (resp. avec les galeries avec signes) de U_{W_I} l'image réciproque est injective, d'où le résultat. ■

REMARQUE. Les images directes de deux chambres mitoyennes $w(C)$ et $ws(C)$ sont égales à $\alpha_I(w)(C_{W_I})$ et $\alpha_I(ws)(C_{W_I})$. Or ces deux chambres sont égales ou mitoyennes. Ceci montre que pour tout $s \in S$ on a $\alpha_I(ws) = \alpha_I(w)$ ou $\alpha_I(w)t$ avec $t \in I$. Le deuxième cas se produit si et seulement si $w_1 s w_1^{-1} = t \in I$, où w_1 est le représentant I -réduit de la classe à droite $W_I w$.

4. Le groupe de tresses comme groupe fondamental. Nous gardons les notations du chapitre précédent, sauf que C ne désigne plus nécessairement la chambre fondamentale mais une chambre quelconque. Dans ce chapitre nous allons interpréter le groupe de tresses pur et le groupe de tresses en termes de classes de chemins dans le complémentaire de l'ensemble des complexifiés des murs dans le complexifié de l'espace. Plus précisément, si \mathcal{M} désigne l'ensemble des murs nous considérons

$$Y = \{ z \in E^* \otimes \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in U^\circ \text{ et } z \notin \cup_{M \in \mathcal{M}} M \otimes \mathbb{C} \}.$$

Le groupe W agit sur Y . On peut considérer le quotient Y/W . L'objectif de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant

THÉORÈME 4.1. *Le groupe fondamental de Y/W est isomorphe au groupe de tresses B_W .*

Pour étudier Y nous introduisons pour toute chambre C la partie

$$Y_C = \{ z \in E^* \otimes \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in U^\circ \text{ et } \forall M \in \mathcal{M}, \operatorname{Im} z \in M \Rightarrow \operatorname{Re} z \in D_M(C) \},$$

où $D_M(C)$ désigne le demi-espace limité par M et contenant C . Remarquons que $C + iE^* \subset Y_C$. L'intérêt des ces parties Y_C vient de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2.

- (1) *Les ensembles Y_C sont ouverts et recouvrent Y .*
- (2) *Soit \mathcal{C} un ensemble fini de chambres et soit $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ l'ensemble des murs séparant au moins deux de ces chambres; l'application Im est surjective de $\cap_{C \in \mathcal{C}} Y_C$ sur $E^* - \cup_{M \in \mathcal{M}_\mathcal{C}} M$ et induit une bijection des composantes connexes de $\cap_{C \in \mathcal{C}} Y_C$ sur les composantes connexes de $E^* - \cup_{M \in \mathcal{M}_\mathcal{C}} M$.*
- (3) *Les composantes connexes de $\cap_{C \in \mathcal{C}} Y_C$ sont contractiles.*

DÉMONSTRATION : Soit $z_0 \in Y_C$; en utilisant 2.22, on voit qu'il existe un voisinage ouvert \mathcal{O} de $\operatorname{Re} z_0$ dans U° ne rencontrant que les murs contenant $\operatorname{Re} z_0$. D'autre part d'après 2.17 les murs séparant $\operatorname{Re} z_0$ de C sont en nombre fini. Soient M_1, \dots, M_k ces murs. L'ensemble $\{ z \in E^* \otimes \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in \mathcal{O} \text{ et } \operatorname{Im} z \notin \cup_i M_i \}$ est ouvert; il contient z_0 car, comme pour tout i on a $\operatorname{Re} z_0 \notin D_{M_i}(C)$, on ne peut pas avoir $\operatorname{Im} z_0 \in M_i$; il est inclus dans Y_C car si z est dans cet ensemble et que $\operatorname{Im}(z)$ est dans un mur M ce mur n'est pas un des M_i , donc ne sépare pas $\operatorname{Re} z_0$ de C , donc ne sépare pas \mathcal{O} de C , donc $\operatorname{Re} z \in D_M(C)$. On a donc montré que Y_C est ouvert. Montrons que ces ensembles forment un recouvrement de Y . Soit $z \in Y$ et soit \mathcal{O} un ouvert de U° ne rencontrant que les murs contenant $\operatorname{Re} z$. Il existe une chambre C rencontrant \mathcal{O} et si $\operatorname{Im} z$ appartient à un mur M , comme ce mur ne contient pas $\operatorname{Re} z$, il ne sépare pas C et \mathcal{O} , donc $\operatorname{Re} z \in D_M(C)$ et on a donc $z \in Y_C$. On a prouvé (1).

Montrons (2) et (3). Soit $z \in \cap_{C \in \mathcal{C}} Y_C$; si $\operatorname{Im} z$ appartient à un mur M alors $\operatorname{Re} z \in D_M(C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, donc $M \notin \mathcal{M}_\mathcal{C}$. On a bien $\operatorname{Im} z \in E^* - \cup_{M \in \mathcal{M}_\mathcal{C}} M$. Réciproquement, soit C_0 une chambre de \mathcal{C} et soit $a \in C_0$; si $y \in E^* - \cup_{M \in \mathcal{M}_\mathcal{C}} M$, par définition un mur M' contenant y n'est pas dans $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ donc ne sépare a d'aucune chambre $C \in \mathcal{C}$: on a $a \in D_{M'}(C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, donc $a + iy \in \cap_{C \in \mathcal{C}} Y_C$. On a prouvé la surjection annoncée.

Comme l'image d'un connexe est connexe Im induit une application sur les composantes connexes. D'autre part, si $z \in \cap_{C \in \mathcal{C}} Y_C$ et si a est comme ci-dessus, pour tout mur M' contenant $\text{Im } z$, l'intervalle $[a, \text{Re } z]$ est inclus dans $D_{M'}(C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$ par convexité de $D_{M'}(C)$, donc l'intervalle $[a + i \text{Im } z, \text{Re } z + i \text{Im } z = z]$ est inclus dans $\cap_{C \in \mathcal{C}} Y_C$. On en déduit que si K est une composante connexe de $E^* - \cap_{M \in \mathcal{M}_c} M$ alors $\{z \in \cap_{C \in \mathcal{C}} C \mid \text{Im } z \in K\}$ est connexe et même qu'il se rétracte sur $\{a + iy \mid y \in K\}$; la rétraction étant l'application définie sur $[0, 1] \times \text{Im}^{-1}(K) \cap (\cap_{C \in \mathcal{C}} Y_C)$ par $(t, z) \mapsto (1-t) \text{Re } z + ta + i \text{Im } z$. Ceci termine la démonstration de (2) et prouve (3) car K , donc $a + iK$ est contractile. ■

NOTATION 4.3. Si C_1, C_2, \dots, C_k sont des chambres on note $K(C_1, C_2, \dots, C_k)$ l'ensemble des composantes connexes du complémentaire dans E^* des murs séparant deux quelconques de ces chambres.

Les cas où \mathcal{C} est de cardinal 1, 2 ou 3 dans l'assertion (2) de la proposition précédente fournissent le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.4.

- (1) Pour toute chambre C l'ouvert Y_C est contractile.
- (2) Si C et C' sont deux chambres mitoyennes, l'intersection $Y_C \cap Y_{C'}$ a deux composantes connexes.
- (3) Soient C_i , ($i = 1, 2, 3$) trois chambres, soit K_{ij} une composante connexe de $Y_{C_i} \cap Y_{C_j}$ pour chaque couple (i, j) avec $1 \leq i < j \leq 3$ et soit K'_{ij} la composante connexe correspondante dans $K(C_i, C_j)$; alors l'intersection $K_{12} \cap K_{23} \cap K_{13}$ est non vide si et seulement si l'intersection $K'_{12} \cap K'_{23} \cap K'_{13}$ est non vide.

DÉMONSTRATION : (1) est directement le cas où $\mathcal{C} = \{C\}$ de 4.2 (2).

(2) se déduit du cas $\mathcal{C} = \{C, C'\}$ de 4.2 (2) : puisqu'un seul mur sépare les deux chambres $K(C, C')$ est constitué des deux demi-espaces définis par ce mur.

Montrons (3). Si $x \in K'_{12} \cap K'_{23} \cap K'_{13}$, il existe $K' \in K(C_1, C_2, C_3)$ contenant x . Soit K la composante connexe de $Y_{C_1} \cap Y_{C_2} \cap Y_{C_3}$ correspondant à K' comme dans la proposition 4.2 c'est-à-dire que $K' = \text{Im}(K)$. Il existe alors $y \in K$ dont la partie imaginaire est x . Puisque $x \in K'_{ij}$, toujours par la proposition 4.2 (2), on a $y \in K_{ij}$ pour les trois couples (i, j) . L'intersection $K_{12} \cap K_{23} \cap K_{13}$ est bien non vide. La réciproque se déduit du fait que $\text{Im}(K_{ij}) = K'_{ij}$. ■

Dans la suite nous fixons un point a_C dans chaque chambre C et nous choisissons ces points de façon qu'ils forment une orbite sous W , ce qui est possible puisque le stabilisateur dans W d'un point d'une chambre est trivial.

Pour calculer les groupes fondamentaux de Y et de Y/W nous allons d'abord étudier le groupoïde Π des classes d'homotopie (à extrémités fixes) de chemins dans Y d'extrémités deux des points a_C . Rappelons que ce groupoïde peut être vu comme une catégorie dont les objets sont les points a_C et les morphismes de a_C vers $a_{C'}$ sont les classes d'homotopie, avec a_C et $a_{C'}$ fixes, de chemins de a_C à $a_{C'}$. En particulier les morphismes de a_C vers lui-même contiennent la classe du chemin trivial, la composition avec cette classe de chemins

est l'identité et tout morphisme de a_C vers $a_{C'}$ a un inverse qui est un morphisme de $a_{C'}$ vers a_C et qu'on obtient en inversant le sens de parcours du chemin.

Nous allons montrer

THÉORÈME 4.5. *Le groupoïde Π est isomorphe au groupoïde des classes de galeries avec signes.*

Pour cela nous utiliserons le théorème général de topologie suivant.

THÉORÈME 4.6. *Soit X un espace topologique recouvert par une famille $(Y_i)_{i \in I}$ d'ouverts simplement connexes et soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de points tels que $a_i \in Y_i$. Alors le groupoïde Π des classes d'homotopie de chemins d'extrémités deux des points a_i est isomorphe au groupoïde des classes de suites $(Y_{i_1}, K_1, Y_{i_2}, K_2, \dots, K_{n-1}, Y_{i_n})$ où $Y_{i_j} \cap Y_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ et où K_j est une composante connexe de $Y_{i_j} \cap Y_{i_{j+1}}$, pour la relation d'équivalence engendrée par les deux équivalences élémentaires : $(\dots, Y_{i_1}, K_1, Y_{i_1}, \dots) \sim (\dots, Y_{i_1}, \dots)$ (dans ce cas $K_1 = Y_{i_1}$) et $(\dots, Y_{i_1}, K_1, Y_{i_2}, K_2, Y_{i_3}, \dots) \sim (\dots, Y_{i_1}, K_3, Y_{i_3}, \dots)$ si $K_1 \cap K_2 \cap K_3 \neq \emptyset$.*

Notons que la relation d'équivalence est compatible avec la composition des suites.

INDICATIONS SUR LA DÉMONSTRATION : Un chemin γ de a_i à a_j peut être, par compacité, recouvert par un nombre fini de Y_k . Comme les ensembles Y_k sont connexes par arcs, on peut supposer que γ passe par a_k . Par compacité tout chemin est donc homotope au composé de chemins élémentaires, un chemin élémentaire étant un chemin de a_{i_1} à a_{i_2} avec $Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \neq \emptyset$ et tel que l'ensemble des points de ce chemin qui sont dans $Y_{i_1} \cap Y_{i_2}$ sont dans une composante connexe bien définie K_1 de cette intersection. Si deux tels chemins élémentaires passent par la même composante connexe K_1 de $Y_{i_1} \cap Y_{i_2}$, ils sont homotopes, grâce au fait que Y_{i_1} et Y_{i_2} sont simplement connexes. Ceci permet de définir une application surjective de l'ensemble des suites comme dans l'énoncé, dans le groupoïde Π . Les deux équivalences élémentaires de l'énoncé donnent des chemins homotopes. Il reste à voir que l'application induite sur les classes est injective ce qui se fait essentiellement en utilisant la compacité de $[0, 1] \times [0, 1]$. ■

Une démonstration complète peut être trouvée dans [VdL, I,1.5].

Nous pouvons appliquer ce théorème en prenant $X = Y$, en prenant les Y_C comme recouvrement par des ouverts simplement connexes et en prenant les points a_C comme points marqués. Grâce à la bijection de 4.2 (2) et au (3) du corollaire 4.4 nous pouvons remplacer les composantes connexes de $Y_C \cap Y_{C'}$ par les éléments de $K(C, C')$. Nous utiliserons les notations suivantes :

DÉFINITIONS ET NOTATIONS 4.7.

- (1) Une suite $(Y_{C_1}, K_1, \dots, K_{n-1}, Y_{C_n})$ où $K_i \in K(C_{i-1}, C_i)$ est appelée une **prégalerie**.
- (2) On note \sim_R l'équivalence entre prégalleries engendrée par les deux relations élémentaires

$$(\dots, Y_{C_1}, E^*, Y_{C_1}, \dots) \sim_R (\dots, Y_{C_1}, \dots)$$

$$(\dots, Y_{C_1}, K_1, Y_{C_2}, K_2, Y_{C_3}, \dots) \sim_R (\dots, Y_{C_1}, K_3, Y_{C_3}, \dots) \text{ si } K_1 \cap K_2 \cap K_3 \neq \emptyset.$$

- (3) Dans une prégalérie $(\dots, Y_C, K, Y_{C'}, \dots)$, si C et C' sont mitoyennes, séparées par un mur M , on écrira $(\dots, Y_C, \varepsilon, Y_{C'}, \dots)$ au lieu de $(\dots, Y_C, K, Y_{C'}, \dots)$ avec $\varepsilon = 1$ (resp. -1) si K est la composante connexe de $Y_C \cap Y_{C'}$ correspondant au demi-espace $D_M(C)$ (resp. $D_M(C')$) par la bijection de 4.2,(2).

Par la bijection de 4.2 l'équivalence $\underset{R}{\sim}$ correspond à celle du théorème 4.6. Le théorème 4.6 et les remarques précédentes montrent donc

COROLLAIRE 4.8. *Le groupoïde Π est isomorphe au groupoïde des classes de prégaleries pour l'équivalence $\underset{R}{\sim}$.*

PROPOSITION 4.9. *Soient C et C' deux chambres, soit $K \in K(C, C')$ et soit $(C = C_0, \dots, C_n = C')$ une galerie réduite de C à C' . Si M_i désigne le mur séparant C_{i-1} et C_i alors K est inclus dans le complémentaire de $\cup_i M_i$ et les prégaleries (Y_{C_0}, K, Y_{C_n}) et $(Y_{C_0}, \varepsilon_1, Y_{C_1}, \dots, \varepsilon_n, Y_{C_n})$ où $\varepsilon_i = 1$ (resp. -1) si $K \subset D_{M_i}(C_{i-1})$ (resp. $K \subset D_{M_i}(C_i)$) sont équivalentes pour l'équivalence $\underset{R}{\sim}$.*

DÉMONSTRATION : Comme la galerie est réduite, l'ensemble des murs séparant C_0 et C_n est exactement $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$. Donc K ne rencontre aucun des murs M_i et on peut définir ε_i comme dans l'énoncé. Posons $K_i = D_{M_i}(C_{i-1})$ si $\varepsilon_i = 1$ et $K_i = D_{M_i}(C_i)$ si $\varepsilon_i = -1$. Par définition $(Y_{C_0}, \varepsilon_1, Y_{C_1}, \dots, \varepsilon_n, Y_{C_n}) = (Y_{C_0}, K_1, Y_{C_1}, \dots, K_n, Y_{C_n})$. Par définition de ε_i on a $K \subset \cap_i K_i$ (en fait cette intersection est égale à K). Donc $K \cap (\cap_i K_i) \neq \emptyset$. La définition de $\underset{R}{\sim}$ donne alors le résultat. \blacksquare

Le lemme suivant donne un cas qui nous sera utile de l'équivalence de galeries avec signes.

LEMME 4.10. *Deux galeries avec signes $(C_0, \varepsilon, C_1, \varepsilon, C_2, \dots, \varepsilon, C_k, -\varepsilon, C_{k+1}, -\varepsilon, \dots, C_{n-1}, -\varepsilon, C_n)$ et $(C_0, -\varepsilon, C'_1, -\varepsilon, C'_2, \dots, -\varepsilon, C'_{n-k}, \varepsilon, C'_{k+1}, \varepsilon, \dots, C'_{n-1}, \varepsilon, C_n)$, telles que les galeries sous-jacentes sont équivalentes par une relation de tresses (de longueur n) sont équivalentes.*

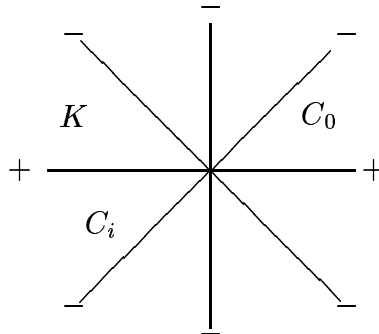
DÉMONSTRATION : La galerie avec signes $(C_0, -\varepsilon, C'_1, -\varepsilon, C'_2, \dots, -\varepsilon, C'_{n-k}, \varepsilon, C'_{n-k-1}, \varepsilon, \dots, C_1, \varepsilon, C_0)$ est équivalente à la galerie (C_0) de longueur 0. On ne change donc pas la classe de galeries avec signes en composant $G = (C_0, \varepsilon, C_1, \varepsilon, C_2, \dots, \varepsilon, C_k, -\varepsilon, C_{k+1}, -\varepsilon, \dots, C_{n-1}, -\varepsilon, C_n)$ avec cette galerie à gauche. Or la galerie avec signes constants $(C'_{n-k}, \varepsilon, C'_{n-k-1}, \varepsilon, \dots, C_1, \varepsilon, C_0, \varepsilon, C_1, \varepsilon, C_2, \dots, \varepsilon, C_k)$ est équivalente par une relation de tresses à la galerie $(C'_{n-k}, \varepsilon, C'_{n-k+1}, \varepsilon, \dots, C'_{n-1}, \varepsilon, C_n, \varepsilon, C_{n-1}, \varepsilon, C_{k+1}, \varepsilon, C_k)$. Pour le voir il suffit de remarquer que les suites associées aux galeries considérées sont formées alternativement de deux éléments s et t de S avec $m_{st} = n$ et que la relation de tresses revient à échanger t et s dans la suite associée. On obtient donc la galerie équivalente à G

$$(C_0, -\varepsilon, C'_1, -\varepsilon, C'_2, \dots, -\varepsilon, C'_{n-k}, \varepsilon, C'_{k+1}, \varepsilon, \dots, C'_{n-1}, \varepsilon, \\ C_n, \varepsilon, C_{n-1}, \varepsilon, C_{k+1}, \varepsilon, C_k, -\varepsilon, C_{k+1}, -\varepsilon, \dots, -\varepsilon, C_n).$$

On obtient le résultat en remarquant que la galerie avec signes $(C_n, \varepsilon, C_{n-1}, \varepsilon, \dots, C_{k+1}, \varepsilon, C_k, -\varepsilon, C_{k+1}, -\varepsilon, \dots, -\varepsilon, C_n)$ est équivalente à la galerie (C_n) . \blacksquare

PROPOSITION 4.11. Soient C et C' deux chambres et soit $K \in K(C, C')$; alors toutes les galeries avec signes $(C = C_0, \varepsilon_1, C_1, \dots, \varepsilon_n, C_n = C')$ telles que la galerie sous-jacente est réduite et que les signes sont donnés par K comme dans 4.9 sont équivalentes.

DÉMONSTRATION : Par 3.6 toutes les galeries réduites de C à C' sont équivalentes. Considérons une équivalence élémentaire correspondant à une relation de tresses. Cette équivalence consiste à remplacer dans une galerie réduite de C à C' une sous-galerie (C_0, C_1, \dots, C_i) telle que la suite associée est (s, t, s, \dots) avec s et t dans S et $i = m_{st}$, par une sous-galerie $(C_0, C'_1, \dots, C'_{i-1}, C_i)$ telle que la suite associée est (t, s, t, \dots) . Il suffit de montrer que les signes déterminés par K pour ces deux galeries sont comme dans 4.10. Ces signes sont aussi les signes déterminés par la composante connexe $K' \in K(C_0, C_i)$ qui contient K . Les murs séparant deux chambres de l'une ou l'autre de ces sous-galeries contiennent tous une même facette de codimension 2, de type $\{s, t\}$. On peut quotienter toute la situation par le sous-espace vectoriel engendré par cette facette, qui ne rencontre pas K' . On est alors ramené à la même question en dimension 2. Dans ce cas le signe affecté à un mur M dans une galerie réduite de C_0 à C_i est $+$ si K et C_0 sont du même côté de M et $-$ sinon (voir figure) : si les deux murs M_j et M_{j+1} séparant les trois chambres consécutives C_{j-1} , C_j et C_{j+1} ont des signes respectifs $-$ et $+$ alors M_j sépare K et C_0 et M_{j+1} ne les sépare pas; or M_j sépare C_j et C_0 et M_{j+1} ne les sépare pas, donc $K = C_j$. Il n'y a donc bien qu'un seul changement de signes dans la suite des signes déterminés par K . On peut faire un raisonnement analogue si M_j est affecté du signe $+$ et M_{j+1} du signe $-$ (dans ce cas on a $C_j = -K$). Or on passe d'une des deux galeries réduites de C_0 à C_i à l'autre en renversant l'ordre dans lequel on traverse les murs. On peut le voir en prenant C_0 comme chambre fondamentale : les murs successifs traversés sont respectivement les murs indexés par $s, sts, ststs, \dots$ et $t, tst, tstst, \dots$. Or $\underbrace{st \dots s}_x = \underbrace{ts \dots t}_y$ si $x + y = 2m_{s,t}$ (voir aussi la démonstration du lemme 1.3). Ceci donne le résultat. ■



La proposition 4.9 nous permet de définir la notion suivante :

DÉFINITION 4.12. On dit qu'une galerie avec signes $(C_0, \varepsilon_1, C_1, \dots, \varepsilon_n, C_n)$ est une **galerie de remplacement** d'une pré-galerie (Y_{C_0}, K, Y_{C_n}) si la galerie sous-jacente (C_0, \dots, C_n) est réduite et si les signes sont déterminés par K comme dans 4.9.

Plus généralement on dit qu'une galerie avec signes est une galerie de remplacement d'une pré-galerie $(Y_{C_0}, K_1, Y_{C_1}, K_2, \dots)$ si elle est obtenue par composition de galeries de

remplacement de chaque $(Y_{C_i}, K_i, Y_{C_{i+1}})$.

Par la proposition 4.11 deux galeries de remplacement d'une même prégalerie sont des galeries avec signes équivalentes.

Nous allons montrer maintenant

PROPOSITION 4.13. *Deux galeries avec signes $(C_0, \varepsilon_1, C_1, \dots, C_n)$ et $(C_0, \varepsilon'_1, C'_1, \dots, C_n)$ sont équivalentes si et seulement si les prégaleries $(Y_{C_0}, \varepsilon_1, Y_{C_1}, \dots, Y_{C_n})$ et $(Y_{C_0}, \varepsilon'_1, Y_{C'_1}, \dots, Y_{C_n})$ sont équivalentes pour \sim_R .*

Pour démontrer ce résultat nous utilisons le lemme suivant :

LEMME 4.14. *Si deux prégaleries $(Y_{C_0}, \varepsilon_1, Y_{C_1}, \dots, Y_{C_n})$ et $(Y_{C_0}, \varepsilon'_1, Y_{C'_1}, \dots, Y_{C_n})$ sont équivalentes pour \sim_R elles le sont par une suite d'équivalences d'une des deux formes*

$$(\dots, Y_A, E^*, Y_A, \dots) \sim_R (\dots, Y_A, \dots)$$

ou

$$(\dots, Y_A, U, Y_B, V, Y_C, \dots) \sim_R (\dots, Y_A, W, Y_C, \dots)$$

avec B et C mitoyennes et $U \cap V \cap W \neq \emptyset$.

DÉMONSTRATION : Il suffit de le montrer pour une équivalence élémentaire

$$(\dots, Y_{C_1}, K_1, Y_{C_2}, K_2, Y_{C_3}, \dots) \sim_R (\dots, Y_{C_1}, K_3, Y_{C_3}, \dots)$$

avec $K_1 \cap K_2 \cap K_3 \neq \emptyset$. On le montre par récurrence sur le nombre de murs séparant C_2 et C_3 . Si C_2 et C_3 sont mitoyennes c'est terminé. Sinon, soit C'_2 une chambre mitoyenne de C_3 dans une galerie réduite de C_2 à C_3 . Les murs séparant C_2 et C_3 sont les murs séparant C_2 et C'_2 et le mur séparant C'_2 et C_3 . Si $L_2 \in K(C_2, C'_2)$ est parmi ces composantes connexes, celle contenant K_2 et si $L_3 \in K(C'_2, C_3)$ est celui de ces deux demi-espaces contenant K_2 , on a $(Y_{C_1}, K_1, Y_{C_2}, K_2, Y_{C_3}) \sim_R (Y_{C_1}, K_1, Y_{C_2}, L_2, Y_{C'_2}, L_3, Y_{C_3})$. Ceci est une équivalence du type demandé. D'autre part les murs séparant C_1 et C'_2 séparent ou bien C_1 et C_2 ou bien C_2 et C'_2 , et dans ce cas séparent C_2 et C_3 . Donc tout point de $K_1 \cap K_2$ est dans une composante connexe appartenant à $K(C_1, C'_2)$. Fixons une composante $L'_2 \in K(C_1, C'_2)$ rencontrant $K_1 \cap K_2 \cap K_3$; on a $K_1 \cap L_2 \cap L'_2 \supset K_1 \cap K_2 \cap L'_2 \neq \emptyset$, donc $(Y_{C_1}, K_1, Y_{C_2}, L_2, Y_{C'_2}, L_3, Y_{C_3}) \sim_R (Y_{C_1}, L'_2, Y_{C'_2}, L_3, Y_{C_3})$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à cette équivalence car le nombre de murs séparant C_2 et C'_2 est un de moins que le nombre de murs séparant C_2 et C_3 . Donc on passe du membre de gauche au membre de droite par une suite d'équivalences comme dans l'énoncé. Enfin on a l'équivalence $(Y_{C_1}, L'_2, Y_{C'_2}, L_3, Y_{C_3}) \sim_R (Y_{C_1}, K_3, Y_{C_3})$ car $L'_2 \cap L_3 \cap K_3 \supset L'_2 \cap K_2 \cap K_3 \neq \emptyset$ et cette équivalence est du type demandé, d'où le résultat. \square

Montrons maintenant la proposition 4.13. Une équivalence élémentaire de galeries avec signes de la forme $(\dots, C_1, \varepsilon, C_2, -\varepsilon, C_1, \dots) \sim (\dots, C_1, \dots)$ donne bien une équivalence des prégaleries correspondantes car

$$(\dots, Y_{C_1}, \varepsilon, Y_{C_2}, -\varepsilon, Y_{C_1}, \dots) = (\dots, Y_{C_1}, K, Y_{C_2}, K, Y_{C_1}, \dots)$$

pour un certain $K \in K(C_1, C_2)$. Comme $K \cap K \cap E^* \neq \emptyset$, cette prégalérie est équivalente pour \sim_R à $(\dots, Y_{C_1}, E^*, Y_{C_1}, \dots)$ et cette dernière prégalérie est équivalente à (\dots, Y_{C_1}, \dots) .

Considérons maintenant l'autre type d'équivalence élémentaire de galeries avec signes : $(C_0, \varepsilon, C_1, \dots, \varepsilon, C_n) \sim (C_0, \varepsilon, C'_1, \varepsilon, \dots, C'_{n-1}, \varepsilon, C_n)$ où les galeries sous-jacentes aux deux membres sont des galeries réduites correspondant aux deux membres d'une relation de tresses. Si $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$) les signes sont donnés comme dans 4.9 par la composante $K \in K(C_0, C_n)$ contenant C_0 (resp. C_n). Par 4.9 les deux prégaléries $(Y_{C_0}, \varepsilon, Y_{C_1}, \dots, \varepsilon, Y_{C_n})$ et $(Y_{C_0}, \varepsilon, Y_{C'_1}, \dots, \varepsilon, Y_{C_n})$ sont équivalentes pour \sim à (Y_{C_0}, K, Y_{C_n}) .

Réciproquement considérons deux galeries avec signes $G = (C_0, \varepsilon_1, C_1, \dots, C_{n-1}, \varepsilon_n, C_n)$ et $G' = (C_0, \varepsilon'_1, C'_1, \dots, C'_{n-1}, \varepsilon_n, C_n)$ telles que les prégaléries PG et PG' correspondantes soient équivalentes pour \sim_R . Considérons une suite de prégaléries telle que la première soit PG , que la dernière soit PG' et qu'on passe de chacune à la suivante par une équivalence élémentaire d'un des deux types de l'énoncé du lemme 4.14. On peut associer à chacune de ces prégaléries une galerie de remplacement, la première et la dernière de ces galeries de remplacement étant G et G' respectivement. Il suffit de montrer que deux de ces galeries de remplacement consécutives sont équivalentes. Considérons successivement les deux types d'équivalence élémentaires du lemme 4.14. Si c'est une équivalence $(\dots, Y_A, E^*, Y_A, \dots) \sim_R (\dots, Y_A, \dots)$, les galeries de remplacement correspondantes sont toutes deux (\dots, A, \dots) . Si l'équivalence élémentaire est de la forme

$$(\dots, Y_A, U, Y_B, V, Y_C, \dots) \sim_R (\dots, Y_A, W, Y_C, \dots)$$

avec B et C mitoyennes et $U \cap V \cap W \neq \emptyset$, considérons des galeries de remplacement $(A = C_0, \varepsilon_1, \dots, C_n = B)$ et $(A = D_0, \eta_1, \dots, D_m = C)$ de (Y_A, U, Y_B) et (Y_A, W, Y_C) respectivement. Il y a deux cas. D'abord le cas où le mur séparant B et C ne sépare pas A et B . Alors les murs séparant A et C sont exactement les murs séparant A et B ainsi que le mur séparant B et C . Donc $(A = C_0, \varepsilon_1, C_1, \dots, \varepsilon_n, C_n = B, \varepsilon, C)$ où ε est donné par V est une galerie avec signes dont la galerie sous-jacente est réduite. Ses signes sont donnés par W qui est l'élément de $K(A, C)$ contenant $U \cap V \cap W$. D'autre part $(A = D_0, \eta_1, \dots, D_m = C)$ est aussi une galerie avec signes de A à C dont la galerie sous-jacente est réduite et dont les signes sont donnés par W . Ces deux galeries avec signes sont donc équivalentes par 4.11.

Regardons le cas où le mur séparant B et C sépare aussi A et B . Dans ce cas ce mur ne sépare pas A et C . Donc $(A = D_0, \eta_1, D_1, \dots, \eta_m, D_m = C, \varepsilon, B)$ où ε est donné par V est une galerie avec signes dont la galerie sous-jacente est réduite et les signes sont donnés par U puisque $U \in K(A, B)$ et U contient $U \cap V \cap W$. Donc, par 4.11, cette galerie est équivalente à $(A = C_0, \varepsilon_1, \dots, C_n = B)$. Composons ces deux galeries avec $(B, -\varepsilon, C)$ et utilisons le fait que $(C, \varepsilon, B, -\varepsilon, C) \sim (C)$. On obtient $(A = C_0, \varepsilon_1, \dots, C_n = B, -\varepsilon, C) \sim (A = D_0, \eta_1, \dots, D_m = C)$. Ce qui est l'équivalence cherchée car $-\varepsilon$ est bien le signe donné par V à la galerie (B, C) puisque ε est le signe donné par V à la galerie (C, B) . D'où la proposition 4.13. ■

Du théorème 4.6, du corollaire 4.8 et du résultat précédent on déduit le théorème 4.5 annoncé. De plus comme les classes de galeries avec signes dont l'origine et le but sont fixés et égaux forment un groupe isomorphe au groupe de tresses pur, on a

COROLLAIRE 4.15. *Le groupe fondamental de Y est isomorphe au groupe de tresses pur.*

COROLLAIRE 4.16. *Le groupe fondamental de Y/W est isomorphe au groupe de tresses.*

DÉMONSTRATION : On prend comme point de base dans Y/W l'image commune des points a_C . Le groupe W est un groupe discret (cf. 2.5) qui opère sans point fixe sur Y . En effet si un point est fixe sa partie réelle est fixe donc est dans tous les murs. Donc sa partie imaginaire n'appartient à aucun mur et n'est donc pas fixe. De plus W agit proprement sur Y : il faut voir que si K est un compact de Y le nombre de $w \in W$ tels que $w(K) \cap K \neq \emptyset$ est fini. En prenant la partie réelle on se ramène à la même question dans l'intérieur du cône de Tits. Si K est compact inclus dans U° alors par compacité il peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts ne rencontrant chacun qu'un nombre fini de murs. Donc K ne rencontre qu'un nombre fini de murs donc qu'un nombre fini de facettes qui sont de type sphérique puisque dans U° . Or si $x \in w(K) \cap K$ les facettes contenant $w^{-1}(x)$ et x sont des facettes qui rencontrent K et qui sont envoyées l'une sur l'autre par w . Comme il n'y a qu'un nombre fini de telles facettes et qu'un nombre fini d'éléments envoyant une facette sur une autre, car elles sont de type sphérique, on a le résultat cherché.

On en déduit que $Y \rightarrow Y/W$ est un revêtement galoisien de groupe W (cf. [Godbillon, Topologie Algébrique VII 3.1 et VIII 1.6]). On a donc ([loc. cit. IX,§3]) la propriété de relèvement des lacets de Y/W en chemins de Y d'un point a_C à un autre. On a aussi la propriété de relèvement des homotopies. Donc le groupe fondamental de Y/W est le quotient du groupoïde Π par l'action de W , donc le quotient des classes de galeries avec signes par l'action de W donc isomorphe à B_W par les résultats du chapitre 3. ■

REMARQUE. Le fait qu'on ait un revêtement galoisien de groupe W redonne la suite exacte

$$1 \rightarrow P_W \rightarrow B_W \rightarrow W \rightarrow 1.$$

5. Combinatoire du monoïde de tresses; structure de Garside. Dans ce chapitre nous allons étudier les propriétés algébriques du monoïde de tresses B_W^+ associé à un groupe de Coxeter W . Nous en déduisons dans le cas sphérique des propriétés du groupe de tresses B_W . Les références principales sont [Mi] et :

[DePa] P. Dehornoy, L. Paris, Gaussian groups and Garside groups, two generalizations of Artin groups, *Proc. of London Math. Soc.* **79** (1999) 569–604.

[BDM] David Bessis, François Digne, Jean Michel, Springer theory in braid groups and the Birman-Ko-Lee monoid à paraître dans *Pacific Journal of Math.* (2001).

Rappelons qu'on a un morphisme $p : B_W^+ \rightarrow W$ et une section ensembliste h de ce morphisme dont l'image est notée B_W^{red} . Nous utiliserons les notations suivantes : pour $w \in W$ on note $\mathbf{w} = h(w)$ son relevé dans B_W^{red} . L'ensemble des relevés de S sera noté \mathbf{S} . Dans B_W^+ on a une longueur l additive, qui vaut 1 sur \mathbf{S} . On s'intéresse aux propriétés de divisibilité dans B_W^+ . En général dans un monoïde on dit qu'un élément x divise à gauche un élément y , noté $x \prec y$ s'il existe z tel que $xz = y$. On définit de même la divisibilité à droite. La divisibilité dans B_W^{red} est donnée par le résultat suivant.

PROPOSITION 5.1. *Soient w et w' deux éléments de W alors $\mathbf{w} \prec \mathbf{w}'$ dans B_W^+ si et seulement si $N(w) \subset N(w')$.*

DÉMONSTRATION : Si $\mathbf{w} \prec \mathbf{w}'$ dans B_W^+ , il existe $b \in B_W$ tel que $\mathbf{w}b = \mathbf{w}'$. Donc $l(b) = l(\mathbf{w}') - l(\mathbf{w})$. Comme $l(b) \geq l(p(b))$ et que $l(w') \leq l(w) + l(p(b))$ on en déduit que $l(p(b)) = l(b)$, donc $b \in B_W^{\text{red}}$ et plus précisément, si on pose $v = w^{-1}w'$, on a $b = \mathbf{v}$. Donc $\mathbf{w} \prec \mathbf{w}'$ dans B_W^+ si et seulement si $\mathbf{w}' = \mathbf{w}\mathbf{v}$.

On a $N(w^{-1}w') = N(w^{-1}) + w^{-1}N(w')w$ par 1.5. Cette formule appliquée avec $w' = w$ montre que $N(w^{-1}) = w^{-1}N(w)w$. On a donc $N(v) = w^{-1}(N(w) + N(w'))w$. Donc $N(w) \subset N(w')$ si et seulement si $|N(v)| = |N(w')| - |N(w)|$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathbf{w}' = \mathbf{w}\mathbf{v}$ dans B_W^{red} . ■

Nous donnons maintenant une présentation de B_W^+ en prenant comme générateurs tous les éléments de B_W^{red} .

PROPOSITION 5.2. *Le monoïde B_W^+ admet une présentation où les générateurs sont les éléments de B_W^{red} et les relations sont $\mathbf{w}\mathbf{v} = \mathbf{w}'$ si $wv = w'$ dans W et $l(w') = l(w) + l(v)$.*

DÉMONSTRATION : Les éléments de B_W^{red} sont bien des générateurs. Les relations de l'énoncé sont vraies dans B_W^+ et elles impliquent les relations de tresses puisque les deux membres d'une relation de tresse sont dans B_W^{red} . On a donc équivalence entre les deux présentations. ■

NOTATION 5.3. *Pour \mathbf{s} et \mathbf{t} dans \mathbf{S} tels que m_{st} soit fini nous noterons $\Delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}$ l'élément $\underbrace{\mathbf{st} \dots}_{m_{st}} = \underbrace{\mathbf{ts} \dots}_{m_{st}}$ de B_W^{red} .*

L'ensemble \mathbf{S} a les propriétés suivantes pour la divisibilité à gauche. Les propriétés analogues pour la divisibilité à droite sont vraies aussi.

LEMME 5.4. Soient \mathbf{s} et \mathbf{t} deux éléments de \mathbf{S} .

- (1) Si \mathbf{s} et \mathbf{t} divisent à gauche un élément $\mathbf{w} \in B_W^{\text{red}}$ alors m_{st} est fini et $\Delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}$ divise \mathbf{w} à gauche.
- (2) Si m_{st} est fini et si $\mathbf{w} \in B_W^{\text{red}}$ vérifie $\mathbf{ws} \in B_W^{\text{red}}$ et $\mathbf{wt} \in B_W^{\text{red}}$ alors $\mathbf{w}\Delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}} \in B_W^{\text{red}}$.

DÉMONSTRATION : La propriété (1) est une propriété des éléments de W . On peut écrire $w = vw_1$ où w_1 est $\{s, t\}$ -réduit (cf. 1.8) et $v \in W_{\{s,t\}}$. Si \mathbf{s} et \mathbf{t} divisent \mathbf{w} alors $l(v) + l(w_1) = l(w) = l(sw) + 1 = l(svw_1) + 1 = l(sv) + l(w_1) + 1$ puisque w_1 est $\{s\}$ -réduit, donc $l(sv) = l(v) - 1$ et de même $l(tv) = l(v) - 1$. Donc $\{s, t\}$ est sphérique et v est l'élément de plus grande longueur de $W_{\{s,t\}}$ (cf. démonstration de 2.20), ce qui implique que m_{st} est fini et que $\mathbf{v} = \Delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}$.

Montrons (2). C'est aussi une propriété de W . L'hypothèse signifie que w est réduit par rapport à $\{s, t\}$, donc par 1.8 on a $\mathbf{w}\Delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}} \in B_W^{\text{red}}$. ■

Le monoïde B_W^+ a la propriété de simplifiabilité suivante :

LEMME 5.5. Si \mathbf{v} et \mathbf{w} sont deux éléments de B_W^{red} et s'il existe $b \in B_W$ tel que $b\mathbf{v} = b\mathbf{w}$ ou $\mathbf{v}b = \mathbf{w}b$ alors $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

DÉMONSTRATION : Cette propriété est claire si on utilise 3.1. Mais on peut le démontrer facilement : il suffit de prendre les images dans W de cette égalité. On obtient $v = w$, donc $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Nous allons axiomatiser les propriétés 5.4 et 5.5 de façon à traiter en même temps B_W^+ et d'autres monoïdes que nous introduirons au chapitre suivant.

On considère un ensemble P (ici B_W^{red}) muni d'un produit partiel c'est-à-dire d'une application d'une partie $A \subset P \times P$ dans P . Si $(a, b) \in A$ on dit que le produit ab est défini. On suppose vérifiés les axiomes suivants :

- (G1) Élément neutre. Il existe un élément $1 \in P$ tel que pour tout $p \in P$ les produits $1.p$ et $p.1$ sont définis et égaux à p .
- (G2) Associativité. Si a, b, c sont trois éléments de P alors ab et $(ab)c$ sont définis si et seulement si bc et $a(bc)$ sont définis et dans ce cas on a $(ab)c = a(bc)$.
- (G3) Longueur. Il existe une application longueur $l : P \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $l(ab) = l(a) + l(b)$ quand ab est défini et que $l^{-1}(0) = \{1\}$.
- (G4) Nombre fini d'atomes. L'ensemble des éléments qui ne sont pas produits de deux éléments distincts de 1 (atomes) est fini.

On note S l'ensemble des atomes. Tout élément de P est produit d'atomes.

DÉFINITION 5.6. Sous ces hypothèses on appelle $M(P)$ le monoïde donné par la présentation où les générateurs sont les éléments de P et les relations sont $ab = c$ si le produit ab est défini dans P et égal à c . Ce monoïde s'identifie à l'ensemble des suites d'éléments de P modulo la relation d'équivalence engendrée par les relations du type $(p_1, \dots, p_i, p_{i+1}, \dots, p_k) \sim (p_1, \dots, p_i p_{i+1}, \dots, p_k)$ si $p_i p_{i+1}$ est défini. La longueur dans P s'étend en une longueur additive sur $M(P)$.

Par récurrence on déduit des axiomes l'associativité du produit d'un nombre quelconque de termes, c'est-à-dire que si tous les produits sont définis pour un certain paren-

thésage d'une suite d'éléments de P , alors pour tout parenthésage les produits sont définis et le produit total est toujours le même. On a plus généralement

LEMME 5.7. *Une suite (p_1, \dots, p_h) d'éléments de P est équivalente à un singleton (p) si et seulement si le produit de cette suite est défini (avec un parenthésage quelconque) et égal à p .*

DÉMONSTRATION : Considérons une suite de longueur minimum de transformations élémentaires allant de (p_1, \dots, p_h) à (p) . Chaque transformation élémentaire consiste soit à remplacer deux termes consécutifs par leur produit, soit à remplacer un produit par la suite des deux facteurs. La dernière transformation est nécessairement du premier type puisqu'elle aboutit à (p) . Considérons la dernière utilisation d'une transformation du second type. Elle consiste à remplacer la suite (\dots, xy, \dots) par (\dots, x, y, \dots) . Les transformations suivantes consistant toutes à remplacer deux termes consécutifs par leur produit, l'associativité généralisée montre que l'on peut commencer par remplacer (\dots, x, y, \dots) par (\dots, xy, \dots) . On obtient donc une suite plus courte en supprimant deux étapes inverses l'une de l'autre qui deviennent consécutives, ce qui montre qu'il ne peut pas y avoir de transformation du second type, d'où le résultat. ■

Le lemme précédent montre que l'application naturelle de P dans $M(P)$ est injective et que si $a \in M(P)$ divise $b \in P$ alors $a \in P$. Considérons les axiomes suivants qui correspondent aux lemmes 5.4 et 5.5 dans le cas du monoïde de tresses.

- (G5) Deux éléments de S qui ont un multiple commun à gauche dans P ont un ppcm dans P .
- (G6) Si deux éléments s et t de S ont un ppcm Δ_{st} et si $a \in P$ vérifie $as \in P$ et $at \in P$, alors $a\Delta_{st} \in P$.
- (G7) Pour tout $m \in M(P)$, tout a et tout b dans P , si $am = bm$ alors $a = b$.

Nous appellerons **structure de Garside** la donnée de P vérifiant les axiomes (G1) à (G7) ainsi que les analogues à droite de (G5) à (G7). Notons que notre terminologie n'est pas exactement la même que celle des autres auteurs qui réservent le nom de structure de Garside au cas où tout couple d'éléments de S a un ppcm et qui autorisent la longueur à être seulement sur-additive. Si s et t sont dans S et on a un ppcm dans P nous noterons celui-ci $\Delta_{s,t}$ et nous dirons que " $\Delta_{s,t}$ existe" pour résumer cette situation.

Dans la suite de ce chapitre nous considérons une structure de Garside P . Nous suivons l'exposition de [Mi], généralisée dans [BDM]. Le lemme fondamental est le suivant :

LEMME 5.8. *Soit E une partie finie non vide de $M(P)$ stable par divisibilité à gauche et vérifiant que pour tout $x \in E$, tout s et tout t dans S , si xs et xt sont dans E alors $\Delta_{s,t}$ existe et $x\Delta_{s,t} \in E$; alors il existe un élément $g \in E$ tel que $E = \{x \in M(P) \mid x \prec g\}$.*

DÉMONSTRATION : Comme E est fini il existe un élément g de longueur maximum dans E . On va montrer par l'absurde que tout élément de E divise g à gauche. Sinon on peut trouver un élément $x \in E$ qui divise g et un élément $s \in S$ tel que xs ne divise pas g : il suffit de prendre un élément de E qui ne divise pas g de l'écrire comme produit d'une suite

d'éléments de S et de prendre la plus grande sous-suite possible dont le produit divise g . Choisissons un tel élément x de longueur maximum. On a $g = xy$ avec $y \neq 1$ puisque x est de longueur strictement plus petite que xs qui est de longueur inférieure ou égale à g . Écrivons $y = ty'$ avec $t \in S$; alors $xt \prec g$, donc $t \neq s$. Les éléments xs et xt sont dans E donc $\Delta_{s,t}$ existe et $x\Delta_{s,t} \in E$ par l'hypothèse du lemme. Or $x\Delta_{s,t}$ ne divise pas g puisque c'est un multiple de xs . Mais xt divise g , donc on peut trouver un élément multiple de xt (et divisant $x\Delta_{s,t}$) qui vérifie la même propriété que x , ce qui est en contradiction avec la maximalité de x . ■

On en déduit :

LEMME 5.9. *Deux éléments de P ont un pgcd dans P .*

DÉMONSTRATION : Il suffit d'appliquer le lemme précédent à l'ensemble E des diviseurs commun de deux éléments a et b de P . Vérifions les hypothèses de 5.8. Si xs et xt divisent a et b , avec $x \in P$ et $s, t \in S$, on a $a = xy$ et par simplifiabilité (axiome (G7)) s et t divisent y . Donc $\Delta_{s,t}$ existe et divise y par (G5). Donc $x\Delta_{s,t}$ divise a . De même $x\Delta_{s,t}$ divise b . Donc $x\Delta_{s,t} \in E$ et les hypothèses sont satisfaites. Le g fourni par 5.8 donne le résultat. ■

PROPOSITION 5.10. *Soient a et b dans P , alors il existe un élément unique $c \in P$ maximal pour la divisibilité à gauche tel que $c \prec b$ et $ac \in P$.*

DÉMONSTRATION : On applique 5.8 à $E = \{c \in P \mid ac \in P \text{ et } c \prec b\}$. Si cs et ct sont dans E alors cs et ct divisent b ; écrivons $b = cd$, alors par (G7) s et t divisent d , donc $\Delta_{s,t}$ existe et divise d , donc $c\Delta_{s,t} \prec b$. D'autre part acs et act sont dans P et $\Delta_{s,t}$ existe donc $ac\Delta_{s,t} \in P$ par (G6). Les hypothèses de 5.8 sont donc bien vérifiées. L'élément g fourni par la conclusion de ce lemme est l'élément cherché. ■

Avec les notations de la proposition précédente, on pose $\alpha_2(a, b) = ac$ et $b = c\omega_2(a, b)$. Ceci définit bien $\omega_2(a, b)$ par (G7).

PROPOSITION 5.11. *Si a, b, c sont des éléments de P tels que $ab \in P$ on a*

- (1) $\alpha_2(ab, c) = \alpha_2(a, \alpha_2(b, c))$
- (2) $\omega_2(ab, c) = \omega_2(a, \alpha_2(b, c))\omega_2(b, c)$.

DÉMONSTRATION : Par définition $\alpha_2(ab, c) = abx$ où x est maximal pour la divisibilité à gauche tel que $abx \in P$ et $x \prec c$. De même $\alpha_2(b, c) = by$ où y est maximal tel que $by \in P$ et $y \prec c$. Comme $bx \in P$ et $x \prec c$, la maximalité de y implique $bx \prec by$. Comme $abx \in P$, on a donc $\alpha_2(a, \alpha_2(b, c)) = \alpha_2(a, by) = abxx'$ pour un certain x' tel que $bxx' \prec by$. Donc par (G7) $xx' \prec y$. Comme $y \prec c$, donc $xx' \prec c$, et comme $abxx' \in P$ on a $x' = 1$ par maximalité de x , d'où (1).

Montrons (2). On a $abc = \alpha_2(ab, c)\omega_2(ab, c)$ et

$$\begin{aligned} \alpha_2(ab, c)\omega_2(a, \alpha_2(b, c))\omega_2(b, c) &= \alpha_2(a, \alpha_2(b, c))\omega_2(a, \alpha_2(b, c))\omega_2(b, c) = \\ &= a\alpha_2(b, c)\omega_2(b, c) = abc, \end{aligned}$$

la première égalité par (1). On obtient (2) si on peut simplifier l'égalité entre ces deux expressions de abc par $\alpha_2(ab, c)$ et on peut simplifier en utilisant (G7) si on sait que les deux membres de (2) sont dans P . Comme $\omega_2(ab, c) \in P$ par définition, il reste à voir que $\omega_2(a\alpha_2(b, c))\omega_2(b, c) \in P$. On a $\alpha_2(b, c) = bz$ avec $z \in P$ et $c = z\omega_2(b, c)$. Comme $ab \prec abz$ et $ab \in P$, on a $\alpha_2(a, bz) = abz_1$ pour un certain z_1 tel que $z_1 \prec z$. Donc $bz = bz_1\omega_2(a, bz)$ et par (G7) on en déduit $z = z_1\omega_2(a, bz)$. Donc

$$z_1\omega_2(a, \alpha_2(b, c))\omega_2(b, c) = z_1\omega_2(a, bz)\omega_2(b, c) = z\omega_2(b, c) = c.$$

Or tout diviseur de c est dans P , d'où la propriété cherchée. ■

Nous allons maintenant étendre α_2 à tout $M(P)$.

PROPOSITION 5.12. *Il existe une unique application $\alpha : M(P) \rightarrow P$ qui est l'identité sur P , telle que $\alpha(ab) = \alpha_2(a, b)$ si a et b sont dans P et que pour tout x et tout y dans $M(P)$ on ait $\alpha(xy) = \alpha(x\alpha(y))$. De plus $\alpha(x)$ est le plus grand (pour la divisibilité à gauche) diviseur de x dans P .*

DÉMONSTRATION : Le monoïde $M(P)$ est l'ensemble des classes de suites d'éléments de P (cf. 5.6). Nous allons définir α sur les suites de façon compatible avec la relation d'équivalence. Ceci nous donnera un α bien défini sur $M(P)$. On connaît α sur la suite vide et sur les suites de longueur 1 puisque α est l'identité sur P . Les conditions de l'énoncé imposent

$$\alpha(p_1, \dots, p_k) = \alpha_2(p_1, \alpha(p_2, \dots, p_k)) \quad (*).$$

Ceci donne l'unicité de α par récurrence sur la longueur des suites. Nous allons montrer par récurrence sur k que la formule (*) est compatible avec la relation élémentaire consistant à remplacer une suite (p_1, \dots, p_k) par la suite de longueur $k - 1$ $(p_1, \dots, p_i p_{i+1}, \dots, p_k)$ quand $p_i p_{i+1} \in P$. Supposons cette propriété prouvée pour les suites de longueur strictement inférieure à k . Si dans la suite (p_1, \dots, p_k) on remplace les termes p_i et p_{i+1} par leur produit et si $i > 1$ on sait par hypothèse de récurrence que le deuxième membre de (*) ne change pas. Il suffit donc de considérer le cas $i = 1$. Autrement dit de comparer $\alpha_2(p_1, \alpha(p_2, \dots, p_k))$ et $\alpha_2(p_1 p_2, \alpha(p_3, \dots, p_k))$. Or par 5.11, (1), cette dernière expression vaut $\alpha_2(p_1, \alpha_2(p_2, \alpha(p_3, \dots, p_k)))$. Comme $\alpha_2(p_2, \alpha(p_3, \dots, p_k)) = \alpha(p_2, p_3, \dots, p_k)$, on obtient le résultat, donc α est bien défini sur $M(P)$.

Montrons que $\alpha(xy) = \alpha(x\alpha(y))$ par récurrence sur $m + n$ si x peut être représenté par une suite (x_1, \dots, x_m) et y par une suite (y_1, \dots, y_n) . On a $\alpha(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \alpha_2(x_1, \alpha(x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n))$. Ceci est égal par récurrence à $\alpha_2(x_1, \alpha(x_2, \dots, x_m, \alpha(y)))$, c'est-à-dire par définition de α à $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_m, \alpha(y))$, d'où le résultat.

Il reste à voir que $\alpha(x)$ est le plus grand diviseur dans P de x . C'est par définition un diviseur de x dans P . Si $p \in P$ divise x alors $x = py$ et on a $\alpha(x) = \alpha(py) = \alpha(p\alpha(y)) = \alpha_2(p, \alpha(y))$ qui est multiple de p par définition, d'où le résultat. ■

Nous allons maintenant étendre de façon semblable l'application ω_2 .

PROPOSITION 5.13. *Il existe une unique application $\omega : M(P) \rightarrow M(P)$ telle que $\omega(xy) = \omega(x\alpha(y))\omega(y)$ pour tout x et tout y et que $\omega(ab) = \omega_2(a, b)$ pour a et b dans P .*

DÉMONSTRATION : Comme dans la proposition précédente on définit ω sur les suites d'éléments de P . On doit avoir $\omega(a) = 1$ pour $a \in P$ et $\omega(a, b) = \omega_2(a, b)$ pour une suite de longueur 2. Ces deux formules sont compatibles avec l'équivalence $(a, b) \sim (ab)$ quand le produit ab est dans P . On doit avoir $\omega(p_1, \dots, p_k) = \omega_2(p_1, \alpha(p_2 \dots p_k))\omega(p_2, \dots, p_k)$, ce qui donne l'unicité. Définissons ω sur les suites par cette formule par récurrence sur k et montrons par récurrence la compatibilité comme dans la démonstration de 5.12. Comme dans cette démonstration il suffit de comparer $\omega(p_1, p_2, \dots, p_k)$ et $\omega(p_1 p_2, p_3, \dots, p_k)$ quand $p_1 p_2 \in P$. Or $\omega(p_2, p_3, \dots, p_k) = \omega_2(p_2, \alpha(p_3 \dots p_k))\omega(p_3, \dots, p_k)$ par définition. Donc

$$\omega(p_1, \dots, p_k) = \omega_2(p_1, \alpha(p_2 \dots p_k))\omega_2(p_2, \alpha(p_3 \dots p_k))\omega(p_3, \dots, p_k),$$

ce qui est égal à $\omega_2(p_1 p_2, \alpha(p_3 \dots p_k))\omega(p_3, \dots, p_k)$ par 5.11 (2). D'où le résultat.

On a donc défini ω sur $M(P)$. Démontrons la propriété $\omega(xy) = \omega(x\alpha(y))\omega(y)$ par récurrence sur $m+n$ si x et y sont représentés respectivement par des suites (x_1, x_2, \dots, x_m) et (y_1, \dots, y_n) . On a

$$\begin{aligned} \omega(xy) &= \omega(x_1 \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \omega_2(x_1, \alpha(x_2 \dots x_m y_1 \dots y_n))\omega(x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \\ &= \omega_2(x_1, \alpha(x_2 \dots x_m y_1 \dots y_n))\omega(x_2, \dots, x_m, \alpha(y_1 \dots y_n))\omega(y_1, \dots, y_n) \\ &= \omega_2(x_1, \alpha(x_2 \dots x_m \alpha(y_1 \dots y_n)))\omega(x_2, \dots, x_m, \alpha(y_1 \dots y_n))\omega(y_1, \dots, y_n) \\ &= \omega(x_1, x_2, \dots, x_m, \alpha(y_1 \dots y_n))\omega(y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

la deuxième ligne par récurrence, la troisième par 5.11 (1) et la dernière par définition de ω , d'où le résultat. ■

On a de plus :

PROPOSITION 5.14. *Soit $x \in M(P)$; alors $\omega(x)$ est l'unique élément de $y \in M(P)$ tel que $x = \alpha(x)y$.*

DÉMONSTRATION : Montrons-le par récurrence sur la longueur de x dans $M(P)$. Si $x = \alpha(x)y$, on a $\omega(x) = \omega(\alpha(x)y) = \omega(\alpha(x)\alpha(y))\omega(y)$ par 5.13. D'autre part $\alpha(x) = \alpha(\alpha(x)y) = \alpha(\alpha(x)\alpha(y))$ par 5.12. Autrement dit $\alpha_2(\alpha(x), \alpha(y)) = \alpha(x)$. Donc

$$\omega(\alpha(x)\alpha(y)) = \omega_2(\alpha(x), \alpha(y)) = \alpha(y),$$

par définition de ω_2 . On en déduit $\omega(x) = \alpha(y)\omega(y) = y$ par récurrence puisque $l(y) < l(x)$. ■

Nous pouvons maintenant démontrer pour $M(P)$ les propriétés de simplifiabilité, de ppcm et de pgcd analogues à celle de P .

PROPOSITION 5.15. *Le monoïde $M(P)$ est simplifiable à droite et à gauche.*

DÉMONSTRATION : Supposons $xy = xz$ avec x, y et z dans $M(P)$. On veut montrer que $y = z$. Par récurrence sur le nombre de termes dans une suite d'éléments de P dont le

produit vaut x on se ramène à $x \in P$. On a alors $\alpha(xy) = \alpha(xz) = xb$ avec $b \prec y$ et $b \prec z$. Posons $y = by'$ et $z = bz'$. On a $xy = xby' = xbz'$, d'où $y' = z' = \omega(xy)$ par la proposition précédente. Donc $y = by' = bz' = z$. Tous les axiomes étant symétriques, on a de façon analogue la simplifiabilité à droite. ■

PROPOSITION 5.16. *Si s et t sont dans l'ensemble S des atomes et divisent $x \in M(P)$ alors s et t ont un ppcm $\Delta_{s,t}$ dans P qui est aussi leur ppcm dans $M(P)$.*

DÉMONSTRATION : Si s et t divisent x ils divisent $\alpha(x)$. On conclut par (G5). ■

PROPOSITION 5.17. *Deux éléments de $M(P)$ ont un pgcd de chaque côté.*

DÉMONSTRATION : Nous traitons le cas du pgcd à gauche. On peut suivre exactement la démonstration du lemme 5.9 en remplaçant l'axiome (G5) par 5.16 ci-dessus et l'axiome (G7) par 5.15. ■

PROPOSITION 5.18. *Toute famille d'éléments de $M(P)$ qui a un multiple commun à droite (resp. à gauche) a un ppcm à droite (resp. à gauche).*

DÉMONSTRATION : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de P ayant un multiple commun. On applique le lemme 5.8 à l'ensemble des éléments qui divisent tous les multiples commun des x_i . Cet ensemble est non vide par hypothèse et fini car tout élément n'a qu'un nombre fini de diviseurs puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de longueur donnée. D'autre part si s et t sont dans S et si $x \in M(P)$ est tel que xs et xt divisent un élément alors cet élément est de la forme xz et s et t divisent z par la simplifiabilité de $M(P)$. Donc $\Delta_{s,t}$ existe par 5.16 et $x\Delta_{s,t}$ divise xz . En appliquant ceci aux multiples communs des x_i on voit que les hypothèses de 5.8 sont vérifiées. L'élément fourni par sa conclusion est le ppcm des x_i par définition. ■

COROLLAIRE 5.19. *Si dans l'énoncé précédent il s'agit d'une famille d'éléments de P leur ppcm est dans P .*

DÉMONSTRATION : En effet si des éléments de P divisent $x \in M(P)$, ils divisent $\alpha(x) \in P$ donc leur ppcm est dans P . ■

Grâce à l'existence de α on peut écrire tout élément de $M(P)$ de façon unique comme un produit $x_1 \dots x_k$ d'éléments de P où pour tout i on a $x_i = \alpha(x_i \dots x_k)$. Une telle décomposition en produit sera appelée une **forme normale**. Une telle forme est caractérisée localement :

PROPOSITION 5.20. *Une décomposition en produit $x_1 \dots x_k$ est une forme normale si et seulement si $x_i x_{i+1}$ est une forme normale pour tout i .*

DÉMONSTRATION : On a $\alpha(x_i \dots x_k) = \alpha(x_i \alpha(x_{i+1} \dots x_k))$. Donc si $x_1 \dots x_k$ est une forme normale, on a $x_i = \alpha(x_i x_{i+1})$. Réciproquement on raisonne par récurrence sur la longueur de la suite : si $\alpha(x_{i+1} \dots x_k) = x_{i+1}$ alors $\alpha(x_i \dots x_k) = \alpha(x_i \alpha(x_{i+1} \dots x_k)) = \alpha(x_i x_{i+1}) = x_i$. ■

Nous étudions maintenant le cas d'une structure de Garside où les éléments de P ont un multiple commun. C'est par exemple vrai dans le monoïde de tresses avec $P = B_W^{\text{red}}$, comme nous le verrons plus loin.

PROPOSITION 5.21. *Supposons que tous les éléments de P ont un ppcm à gauche Δ . Alors*

- (1) *Il existe un automorphisme σ de $M(P)$ tel que pour tout $x \in M(P)$ on ait $\Delta x = \sigma(x)\Delta$.*
- (2) *Δ est aussi ppcm à droite de P .*

DÉMONSTRATION : L'existence de Δ implique que P est fini. Pour tout $a \in P$ il existe un unique $\Delta_a \in P$ tel que $\Delta = \Delta_a a$. Appliquons ceci à Δ_a , on obtient un élément $\sigma(a)$ tel que $\Delta = \sigma(a)\Delta_a$. On a donc $\sigma(a)\Delta = \sigma(a)\Delta_a a = \Delta a$. De la simplifiabilité de $M(P)$ on déduit que σ est injectif et compatible avec le produit. Comme P est fini σ est bijectif, d'où (1). De plus le calcul ci-dessus et la surjectivité montrent que Δ est multiple à droite de tous les éléments de P , d'où (2). ■

COROLLAIRE 5.22. *Supposons que les éléments de P ont un ppcm Δ . Soit $G(P)$ le groupe ayant comme groupe même présentation que P comme monoïde. Le morphisme naturel $M(P) \rightarrow G(P)$ est injectif et tout élément de $G(P)$ s'écrit de façon unique $x^{-1}y$ avec x et y dans $M(P)$ sans diviseur commun à gauche autre que 1.*

DÉMONSTRATION : Puisque tout élément de P divise Δ et que la commutation avec Δ induit l'automorphisme σ sur P , un produit de n éléments de P divise Δ^n . Donc tout couple d'éléments de $M(P)$ a un multiple commun. On a un monoïde simplifiable dans lequel deux éléments quelconques ont un multiple commun. Ceci implique l'injectivité de $M(P) \rightarrow G(P)$ (conditions de Öre pour un monoïde). Dans notre cas on peut le voir facilement par exemple en montrant que les couples (Δ^n, x) avec $n \in \mathbb{N}$ et $x \in M(P)$ modulo l'équivalence $(\Delta^n, x) \sim (\Delta^{n+m}, \Delta^m x)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, forment un groupe pour le produit $(\Delta^m, x)(\Delta^n, y) = (\Delta^{n+m}, \sigma^m(x)y)$ et que $x \mapsto (1, x)$ est un morphisme injectif de $M(P)$ dans ce groupe. S'il existe un morphisme injectif de $M(P)$ dans un groupe, comme ce morphisme se factorise par définition par $M(P) \rightarrow G(P)$ ce dernier est aussi injectif.

Tout élément de $G(P)$ s'écrit $\Delta^{-n}x$ avec $x \in M(P)$ et $n \in \mathbb{N}$. En simplifiant par le pgcd à gauche de Δ^n et x on obtient une écriture sous la forme $y^{-1}z$ où y et z n'ont pas de diviseur commun non trivial à gauche. Montrons l'unicité d'une telle écriture. Supposons $x^{-1}y = z^{-1}t$ avec x, y, z, t dans $M(P)$, et x et y (resp. z et t) sans facteur commun différent de 1 à gauche. Soit $xx_1 = yy_1$ le ppcm de x et y . On a $zx_1 = zx^{-1}yy_1 = ty_1$. Comme z et t n'ont pas de facteur commun autre que 1 à gauche $zx_1 = ty_1$ est le ppcm de x_1 et y_1 à gauche. En effet $zx_1 = ty_1$ est un multiple à gauche de ce ppcm $x'x_1 = y'y_1$ par un élément u , d'où $z = ux'$ et $t = uy'$, d'où $u = 1$. Pour les mêmes raisons $xx_1 = yy_1$ est aussi le ppcm à gauche de x_1 et y_1 . Donc $xx_1 = yy_1 = zx_1 = ty_1$ et par simplifiabilité $x = z$ et $y = t$. ■

Donnons encore quelques propriétés des formes normales quand Δ existe.

PROPOSITION 5.23. *Supposons que P a un ppcm Δ et soit σ l'automorphisme induit par la conjugaison par Δ . Si $x_1 \dots x_n$ est une forme normale et si pour tout i on définit x'_i par $\Delta = x_i x'_i$, alors $\sigma^n(x'_n) \sigma^{n-1}(x'_{n-1}) \dots \sigma(x'_1)$ est aussi une forme normale.*

DÉMONSTRATION : D'après 5.20 et comme σ envoie une forme normale sur une forme normale, l'énoncé revient à dire que si $x_1 x_2$ est une forme normale alors $\sigma(x'_2) x'_1$ est une forme normale. Or $x_1 x_2$ est une forme normale si et seulement si pour tout diviseur u de x_2 on a $x_1 u \notin P$. Or $x_1 u \in P$ si et seulement si u divise x'_1 puisque $\Delta = x_1 x'_1$, donc $x_1 u \notin P$ si et seulement si u ne divise pas x'_1 . De même $u \prec x_2$ si et seulement si $\sigma(x'_2) u \in P$, puisque $\Delta = \sigma(x'_2) x_2$. Donc $x_1 x_2$ est une forme normale si et seulement si pour tout diviseur u de x'_1 on a $\sigma(x'_2) u \notin P$ ce qui est la condition pour que $\sigma(x'_2) x'_1$ soit une forme normale. ■

COROLLAIRE 5.24. *Si x et y sont deux éléments de P sans diviseur commun différent de 1 à gauche, si $x = x_1 \dots x_m$ et $y = y_1 \dots y_n$ sont leurs formes normales respectives, alors la forme normale de $\Delta^m x^{-1} y$ est $\sigma^n(x'_m) \dots \sigma(x'_1) y_1 \dots y_n$ où $x_i x'_i = \Delta$ pour tout i et m est la plus petite puissance de Δ telle que $\Delta^m x^{-1} y$ soit dans $M(P)$.*

DÉMONSTRATION : D'après 5.23 on sait que $\sigma^n(x'_m) \dots \sigma(x'_1)$ est une forme normale. Comme $y_1 \dots y_n$ est aussi une forme normale il reste à voir que $\sigma(x'_1) y_1$ est une forme normale. Or si $\sigma(x'_1) u \in P$, d'après ce qu'on a vu dans la démonstration de 5.23, on a $u \prec x_1$ ce qui est incompatible avec $u \prec y_1$ si $u \neq 1$ puisque x et y n'ont pas de diviseur commun non trivial. On a donc bien une forme normale.

Si $\Delta^h x^{-1} y \in M(P)$ avec $h < m$ alors Δ^{m-h} divise $\Delta^m x^{-1} y$ dans $M(P)$. Donc la forme normale de $\Delta^m x^{-1} y$ commence par Δ (comme la forme normale de tout élément divisible par Δ). Donc $\sigma^n(x'_m) = \Delta$ par unicité de la forme normale, ce qui signifie que $x'_m = \Delta$, donc que $x_m = 1$ ce qui est interdit dans une forme normale. ■

Appliquons ce qui précède au monoïde de tresses. Si W est de type sphérique et si $\Delta \in B_W^{\text{red}}$ est le relevé de l'élément w_0 de plus grande longueur de W (cf. 2.20), pour tout $v \in W$ on a $l(v) + l(v^{-1} w_0) = l(w_0)$, donc $\mathbf{v} \mathbf{v}' = \Delta$ si \mathbf{v} relève v et \mathbf{v}' relève $v^{-1} w_0$ dans B_W^{red} . Donc Δ est bien multiple de tous les éléments de B_W^{red} et est donc le ppcm de B_W^{red} . On obtient donc dans ce cas que le monoïde de tresses se plonge dans le groupe de tresses correspondant (ce qui est le résultat de Paris, 3.1 en général). On obtient aussi que la conjugaison par Δ induit un automorphisme du monoïde de tresses.

Dans le cas d'un monoïde de tresses on a aussi le résultat suivant qui n'est pas vraie pour une structure de Garside générale.

LEMME 5.25. *Dans le monoïde de tresses si les éléments de \mathbf{S} ont un ppcm le type est sphérique et ce ppcm vaut Δ .*

DÉMONSTRATION : On a vu au cours de la démonstration de 2.20 que si un élément $v \in W$ vérifie $l(sv) = l(v) - 1$ pour tout $s \in S$ alors W est de type sphérique et $v = w_0$. Ceci prouve que si $\mathbf{v} \in B_W^{\text{red}}$ est multiple de tous les éléments de \mathbf{S} il est égal à Δ . ■

L'énoncé suivant est une sorte de réciproque à 5.21 dans le cas d'un monoïde de tresses de type irréductible, c'est-à-dire si le diagramme de Coxeter associé est connexe ou encore

si la clôture transitive dans \mathbf{S} d'un élément s par la relation “ s et s' ne commutent pas” est \mathbf{S} tout entier.

PROPOSITION 5.26. *Supposons W de type irréductible. Soit $b \in B_W^+$ tel qu'il existe un automorphisme τ de B_W^+ vérifiant $xb = b\tau(x)$ pour tout $x \in B_W^+$. Alors W est de type sphérique et si Δ relève l'élément de plus grande longueur de W , l'élément b est une puissance de Δ .*

DÉMONSTRATION : Nous montrons d'abord que si $s \in \mathbf{S}$ divise b et si $t \in \mathbf{S}$ ne commute pas avec s alors t divise b . Comme $s \prec b\tau(t) = tb$, les deux éléments s et t divisent tb , donc leur ppcm $\Delta_{s,t}$ divise tb . Comme $\Delta_{s,t}$ est multiple de tst par l'hypothèse faite sur s et t , on obtient en simplifiant que st divise b . Écrivons $b = stb'$. On a donc aussi $b = tb'\tau(s)$, donc t divise b .

En utilisant l'irréductibilité on en déduit que tous les éléments de \mathbf{S} divisent b . Donc le type est sphérique et Δ divise b par 5.25. On a $b = \Delta b_1$ et b_1 est un élément de B_W^+ qui induit aussi par conjugaison un automorphisme du monoïde. On obtient donc le résultat par récurrence sur la longueur.

COROLLAIRE 5.27. *Le centre d'un groupe de tresses de type sphérique irréductible est engendré par la plus petite puissance centrale de Δ .*

DÉMONSTRATION : Comme tout élément du groupe se ramène dans le monoïde par multiplication par une puissance convenable de Δ , par exemple par une puissance centrale, on voit que le centre du groupe de tresses est engendré par une puissance de Δ et par le centre du monoïde qui est formé de puissances de Δ par la proposition précédente. ■

REMARQUE. On sait par la classification des types sphériques irréductibles (voir [Bbk, IV]) que l'élément Δ est central pour tous ces types sauf pour les types A_n , E_6 et D_{2n+1} où son carré est central.

Notons aussi que si le type n'est pas sphérique on n'a aucun renseignement sur le centre du groupe de tresses. On sait seulement que le centre du monoïde est trivial.

Revenons maintenant à la situation générale d'une structure de Garside, en reprenant les notations des axiomes (G1) à (G7). On a le résultat suivant

THÉORÈME 5.28. *Soit Γ un groupe d'automorphismes de P conservant S . Alors l'ensemble P^Γ des points fixes de Γ dans P muni de la restriction du produit définit une structure de Garside dont le monoïde associé est $M(P)^\Gamma$ et les atomes sont les ppcm minimaux pour la divisibilité des orbites de Γ dans S qui ont un ppcm.*

DÉMONSTRATION : La restriction du produit est bien un produit partiel unitaire et associatif sur P^Γ . La restriction de la longueur est une longueur additive. Soit Σ l'ensemble des ppcm minimaux des orbites de Γ dans S comme dans l'énoncé. Si $p \in P^\Gamma$ et si $s \in S$ divise p à gauche alors tous les éléments de l'orbite de s divisent p , donc le ppcm de l'orbite existe et divise p . On voit donc que les atomes sont les éléments de Σ . Il reste à vérifier les axiomes (G5) à (G7). Si deux éléments de P^Γ ont un ppcm, celui-ci est Γ -stable par

unicité, on en déduit que (G5) est vérifié. Si $a \in P^\Gamma$ et σ et τ dans Σ sont tels que $a\sigma$ et $a\tau$ sont dans P^Γ et que le ppcm $\Delta_{\sigma,\tau}$ de σ et τ existe, alors, comme $a\Delta_{\sigma,\tau}$ est le ppcm de $a\sigma$ et $a\tau$ il est dans P , donc dans P^Γ , d'où (G6). L'axiome (G7) s'obtient en utilisant le morphisme de $M(P^\Gamma)$ dans $M(P)$ induit par l'inclusion $P^\Gamma \subset P$ et la simplifiabilité dans $M(P)$.

Il reste à voir que $M(P^\Gamma) \simeq M(P)^\Gamma$. Si un élément de $M(P)$ est fixe par Γ les termes de sa forme normale sont dans P^Γ par unicité de la forme normale. Réciproquement si ab avec a et b dans P^Γ est une forme normale dans $M(P^\Gamma)$ et si $c \in P$ divise b est tel que $ac \in P$ alors par un raisonnement analogue à celui fait plus haut, le ppcm x de l'orbite de c existe, est dans P^Γ et divise b et ax est le ppcm de l'orbite de ac donc est dans P^Γ , ce qui implique $x = c = 1$. Les suites d'éléments de P^Γ qui sont des formes normales au sens de $M(P^\Gamma)$ sont donc aussi des formes normales au sens de $M(P)$. On a donc une section du morphisme naturel $M(P^\Gamma) \rightarrow M(P)^\Gamma$ consistant à relever les formes normales, ce qui donne l'isomorphisme annoncé. ■

Notons que la longueur des atomes de P^Γ est en général strictement supérieure à 1, même si elle vaut 1 dans P .

On déduit de la proposition précédente et de 5.22 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.29. *Avec les notations précédentes, si les éléments de P ont un ppcm Δ alors celui-ci est aussi le ppcm des éléments de P^Γ . En particulier on a $G(P^\Gamma) \simeq G(P)^\Gamma$.*

On peut appliquer ce qui précède à un groupe de tresses muni d'un groupe d'automorphismes préservant \mathbf{S} (automorphismes "du diagramme"). Rappelons les résultats suivants de Steinberg et de Hée (voir l'article de JY. Hée : Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné, *Geometria Dedicata* 37 (1991)).

THÉORÈME 5.30. *Soit Γ un groupe fini d'automorphismes d'un système de Coxeter (W, S) et pour chaque orbite de type sphérique I de Γ dans S soit w_0^I l'élément de plus grande longueur de W_I ; alors $(W^\Gamma, \{w_0^I \mid I \text{ orbite de } \Gamma \text{ dans } S\})$ est un système de Coxeter. De plus si l_Γ est la longueur dans W^Γ et si w et w' sont fixes par Γ , on a $l_\Gamma(ww') = l_\Gamma(w) + l_\Gamma(w')$ si et seulement si $l_\Gamma(ww') = l_\Gamma(w) + l_\Gamma(w')$.*

Appliquons ce résultat. Un groupe Γ d'automorphismes d'un système de Coxeter est aussi un groupe d'automorphismes du groupe de tresses associé. La bijection entre B_W^{red} et W fait correspondre les éléments de $(B_W^{\text{red}})^\Gamma$ avec ceux de W^Γ et pour toute orbite I sphérique de Γ dans S l'élément \mathbf{w}_0^I qui relève w_0^I est le ppcm de l'orbite correspondante dans \mathbf{S} . Donc Σ est l'ensemble des \mathbf{w}_0^I et $(B_W^+)^\Gamma = (M(B_W^{\text{red}}))^\Gamma \simeq M((B_W^{\text{red}})^\Gamma)$ qui est le monoïde de tresses associé au groupe de Coxeter W^Γ . En particulier si W est de type sphérique on obtient $B_W^\Gamma \simeq B_{W^\Gamma}$.

6. Un autre exemple de structure de Garside : le monoïde dual. Dans ce chapitre on considère un groupe de tresses de type sphérique B_W . Nous allons introduire un autre monoïde dont le groupe associé est B_W et qui a aussi une structure de Garside. L'idée est de remplacer l'ensemble S par l'ensemble R de toutes les réflexions de W . Les références pour ce chapitre sont [BDM] et

[BKL] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee, A new approach to the word and conjugacy problem in the braid groups, *Adv. Math.* **139 no. 2** (1998).

[B] D. Bessis, The dualraid monoid *preprint*

Nous allons détailler le cas où W est le groupe symétrique S_n (groupe de Coxeter de type A_{n-1}), et nous donnerons à la fin du chapitre des indications sur la généralisation à tous les types sphériques.

Donnons d'abord une nouvelle présentation de B_W . Le groupe de Coxeter de type A_{n-1} sera identifié au groupe symétrique S_{μ_n} de l'ensemble μ_n des racines de l'unité dans \mathbb{C} . On fixe une orientation sur le cercle unité. Nous rappelons aussi que les réflexions de S_{μ_n} sont les transpositions.

PROPOSITION 6.1. *Pour W de type A_{n-1} identifié au groupe des permutations de μ_n le groupe B_W admet une présentation où les générateurs, notés $\delta_{\{i,j\}}$ sont indexés par les parties $\{i,j\}$ de cardinal 2 de μ_n et où les relations sont*

- (1) $\delta_{\{i,j\}}\delta_{\{k,l\}} = \delta_{\{k,l\}}\delta_{\{i,j\}}$ si les segments $[i,j]$ et $[k,l]$ ont une intersection vide dans le plan complexe.
- (2) $\delta_{\{i,j\}}\delta_{\{j,k\}} = \delta_{\{j,k\}}\delta_{\{k,i\}}$ si (i,j,k) est un triplet orienté positivement sur le cercle unité.

DÉMONSTRATION : Il suffit de trouver dans B_W des éléments qui engendrent le groupe et vérifient ces relations et de montrer que les relations de tresses sont conséquences de celles-ci. Choisissons une numérotation cyclique de μ_n , dans l'ordre positif, par les entiers de 1 à n . Dans la notation $\delta_{\{j,k\}}$ on peut alors considérer que j et k sont deux entiers. On note $\mathbf{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{n-1}\}$ les générateurs de B_W dans sa présentation standard comme groupe de tresses : les relations de tresses sont d'ordre 3 pour deux générateurs consécutifs et 2 pour les autres.

Pour $1 \leq j < k \leq n$ on pose $\delta_{\{j,k\}} = \mathbf{s}_j \mathbf{s}_{j+1} \dots \mathbf{s}_{k-1} (\mathbf{s}_j \mathbf{s}_{j+1} \dots \mathbf{s}_{k-2})^{-1}$, élément qui peut aussi s'écrire $(\mathbf{s}_{j+1} \mathbf{s}_{j+2} \dots \mathbf{s}_{k-1})^{-1} \mathbf{s}_j \mathbf{s}_{j+1} \mathbf{s}_{j+2} \dots \mathbf{s}_{k-1}$. En particulier $\delta_{\{j,j+1\}} = \mathbf{s}_j$. Ces éléments engendrent donc B_W . Avant de montrer qu'ils vérifient (1) et (2), nous prouvons le lemme suivant :

LEMME 6.2. *Soit $\delta = \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \dots \mathbf{s}_{n-1}$; la conjugaison par δ envoie $\delta_{\{i,j\}}$ sur $\delta_{\{i+1,j+1\}}$ où $i+1$ et $j+1$ sont pris modulo n .*

DÉMONSTRATION : La conjugaison par δ envoie \mathbf{s}_{n-1} sur $\delta_{\{1,n\}}$ par définition et, pour

$i < n - 1$, envoie \mathbf{s}_i sur \mathbf{s}_{i+1} par le calcul suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_{n-1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{n-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_1^{-1} &= \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_{i+1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i+1}^{-1} \dots \mathbf{s}_1^{-1} \\ &= \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^{-1} \mathbf{s}_{i+1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^{-1} \dots \mathbf{s}_1^{-1} \\ &= \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_{i-1} \mathbf{s}_{i+1} \mathbf{s}_{i-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_1^{-1} = \mathbf{s}_{i+1} \end{aligned}$$

On en déduit que la conjugaison par δ envoie $\delta_{\{i,j\}}$ sur $\delta_{\{i+1,j+1\}}$ où $i+1$ et $j+1$ sont pris modulo n . C'est clair si i et j sont strictement inférieurs à n et on a $\delta \delta_{\{i,n\}} \delta^{-1} = \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_{n-1} (\mathbf{s}_{n-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_{i+1}^{-1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i+1} \dots \mathbf{s}_{n-1}) \mathbf{s}_{n-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_1^{-1} = \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_{i-1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_1^{-1} = \delta_{\{1,i+1\}}$. \square

Montrons maintenant que les relations (1) et (2) sont vérifiées. Si $1 \leq i < j < k < l \leq n$ la relation (1) est claire puisque les éléments de \mathbf{S} intervenant dans l'écriture de $\delta_{\{i,j\}}$ commutent avec les éléments de \mathbf{S} intervenant dans $\delta_{\{k,l\}}$. En général, si les segments $[i,j]$ et $[k,l]$ ne se coupent pas on peut, en conjuguant par une puissance de δ , se ramener à $\delta_{\{1,h\}}$ et $\delta_{\{p,q\}}$ où $1 < h < p < q \leq n$, et ces éléments commutent par l'argument précédent. Pour montrer la deuxième relation on peut aussi par conjugaison par une puissance de δ se ramener au cas où $1 \leq i < j < k \leq n$. Il suffit donc de vérifier (2) dans ce cas. Il faut prouver l'égalité

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{j-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_{i+1}^{-1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i+1} \dots \mathbf{s}_{j-1} \mathbf{s}_{k-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_{j+1}^{-1} \mathbf{s}_j \dots \mathbf{s}_{k-1} &= \\ \mathbf{s}_{k-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_{j+1}^{-1} \mathbf{s}_j \dots \mathbf{s}_{k-1} \mathbf{s}_{k-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_{i+1}^{-1} \mathbf{s}_i \dots \mathbf{s}_{k-1} & \end{aligned}$$

ce qui est équivalent par simplification à droite et simplification dans le membre de droite à l'égalité

$$\underbrace{\mathbf{s}_{j-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_{i+1}^{-1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i+1} \dots \mathbf{s}_{j-1}} \underbrace{\mathbf{s}_{k-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_{j+1}^{-1}} = \mathbf{s}_{k-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_{j+1}^{-1} \mathbf{s}_{j-1}^{-1} \dots \mathbf{s}_{i+1}^{-1} \mathbf{s}_i \dots \mathbf{s}_{j-1}.$$

Or les deux facteurs soulignés commutent et on obtient l'égalité.

Montrons maintenant que les relations de tresses sont conséquences de (1) et (2). La relation $\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j = \mathbf{s}_j \mathbf{s}_i$ quand $|i - j| \geq 2$ est un cas particulier de relation (1). D'autre part en appliquant deux fois la relation (2) on obtient

$$\delta_{\{i,i+1\}} \delta_{\{i+1,i+2\}} \delta_{\{i,i+1\}} = \delta_{\{i+1,i+2\}} \delta_{\{i+2,i\}} \delta_{\{i,i+1\}} = \delta_{\{i+1,i+2\}} \delta_{\{i,i+1\}} \delta_{\{i+1,i+2\}}$$

ce qui est la relation de tresses $\mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i+1} \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i+1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i+1}$. \blacksquare

Nous allons considérer le monoïde défini par la présentation de 6.1, en tant que monoïde et montrer qu'il a une structure de Garside. Pour introduire la partie P de cette structure nous utilisons les deux lemmes suivants.

LEMME 6.3. *Si $\alpha = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ est une partie de μ_n et si la numérotation des éléments de α est croissante pour l'ordre cyclique sur le cercle, l'élément $\delta_{\{z_1,z_2\}} \delta_{\{z_2,z_3\}} \dots \delta_{\{z_{k-1},z_k\}}$ ne dépend pas du choix de z_1 dans α .*

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence immédiate par récurrence sur k de la relation (2) de 6.1. \blacksquare

Nous noterons δ_α le produit considéré dans le lemme 6.3.

LEMME 6.4. *Si α et β sont des parties de μ_n dont les enveloppes convexes dans le plan ne se rencontrent pas alors δ_α et δ_β commutent.*

DÉMONSTRATION : C'est une conséquence de la relation (1) dans 6.1 puisque, si $\{z_i, z_j\} \subset \alpha$ et $\{z_k, z_l\} \subset \beta$, par hypothèse on a $[z_i, z_j] \cap [z_k, z_l] = \emptyset$. ■

DÉFINITION 6.5.

(1) *Nous dirons qu'une partition λ de μ_n est **sans croisements** et le noterons $\lambda \models \mu_n$ si les enveloppes convexes de deux parties distinctes quelconques de λ ne se rencontrent pas.*

(2) *Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \models \mu_n$ on pose $\delta_\lambda = \prod_{\{i \mid |\lambda_i| \geq 2\}} \delta_{\lambda_i}$*

Le lemme 6.4 donne un sens à la définition (2) ci-dessus : le produit est indépendant de l'ordre des facteurs.

Dans la suite nous posons $P = \{\delta_\lambda \mid \lambda \models \mu_n\}$. Nous voulons montrer que la restriction du produit à P est une structure de Garside. Le premier résultat dans ce sens est

LEMME 6.6. *L'application $\lambda \mapsto \delta_\lambda$ de l'ensemble de partitions sans croisements de μ_n dans le groupe de tresses est injective.*

DÉMONSTRATION : L'image de δ_λ dans le groupe symétrique S_{μ_n} est un produit de cycles dont les supports sont exactement les parties de λ . On a donc une application en sens inverse bien définie de P dans l'ensemble des partitions sans croisements. Nous allons maintenant étudier les propriétés de divisibilité dans P . Pour cela nous introduisons la notion suivante :

DÉFINITION 6.7. *Soit $\alpha = \{z_1, \dots, z_k\}$ une partie de μ_n numérotée dans l'ordre cyclique et soit $\alpha' = \{z_{i_1} = z_1, z_{i_2}, \dots, z_{i_h}\}$ une partie de α ; on appelle partition " **α coupée par α'** ", notée $\delta_{\alpha' \setminus \alpha}$ la partition (sans croisements) dont les parties sont les $\{z_{i_j}, z_{i_j+1}, z_{i_j+2}, \dots, z_{i_{j+1}-1}\}$ pour $j = 1, \dots, h$ (on pose $i_{h+1} = k + 1$).*

LEMME 6.8.

(1) *Avec les notations ci-dessus on a $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'} \delta_{\alpha' \setminus \alpha}$*

(2) *Si λ et λ' sont des partitions sans croisements de μ_n et si λ' est plus fine que λ alors il existe une partition sans croisements $\lambda' \setminus \lambda$ telle que $\delta_\lambda = \delta_{\lambda'} \delta_{\lambda' \setminus \lambda}$*

DÉMONSTRATION : On démontre (1) par récurrence sur le cardinal de α' . Avec les notations de 6.7, posons $\alpha'_1 = \{z_{i_2}, \dots, z_{i_h}\}$ et $\alpha_1 = \{z_{i_2}, \dots, z_k\}$. On a

$$\delta_{\alpha'} \delta_{\alpha' \setminus \alpha} = (\delta_{\{z_{i_1}, z_{i_2}\}} \delta_{\alpha'_1}) (\delta_{\{z_1, z_2, \dots, z_{i_2-1}\}} \delta_{\alpha'_1 \setminus \alpha_1}).$$

Donc en utilisant les propriétés de commutation on obtient :

$$\delta_{\alpha'} \delta_{\alpha' \setminus \alpha} = \delta_{\{z_{i_1}, z_{i_2}\}} \delta_{\{z_1, \dots, z_{i_2-1}\}} \delta_{\alpha'_1} \delta_{\alpha'_1 \setminus \alpha_1} = \delta_{\{z_{i_1}, z_{i_2}\}} \delta_{\{z_1, \dots, z_{i_2-1}\}} \delta_{\alpha_1}$$

par hypothèse de récurrence. On conclut car par définition on a $\delta_{\{z_{i_1}, z_{i_2}\}} \delta_{\{z_1, \dots, z_{i_2-1}\}} = \delta_{\{z_1, \dots, z_{i_2}\}}$ et $\delta_{\{z_1, \dots, z_{i_2}\}} \delta_{\alpha_1} = \delta_\alpha$.

Montrons maintenant (2). Raisonnons par récurrence sur le cardinal maximum des parties de λ . Si toutes les parties sont de cardinal 1 ou 2 alors les parties de λ' de cardinal 2 sont certaines parties de λ et le résultat est vrai puisque les facteurs de δ_λ indexés par les différentes parties commutent entre eux.

Considérons une partie α de λ de cardinal strictement plus grand que 2 contenant des parties de λ' de cardinal au moins 2 notées $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r$. L'hypothèse que λ' est sans croisements montre que chaque partie λ'_i avec $i \geq 2$ est incluse dans une partie de $\lambda'_1 \setminus \alpha$. Par hypothèse de récurrence on a $\delta_{\lambda'_1 \setminus \alpha} = \delta_{\lambda''} \delta_{\lambda'' \setminus (\lambda'_1 \setminus \alpha)}$ où λ'' est la partition dont les parties de cardinal au moins 2 sont $\delta_{\lambda'_2}, \delta_{\lambda'_3}, \dots, \delta_{\lambda'_r}$, donc $\delta_\alpha = \delta_{\lambda'_1} \delta_{\lambda''} \delta_{\lambda'' \setminus (\lambda'_1 \setminus \alpha)} = \delta_{\lambda'_1} \delta_{\lambda'_2} \dots \delta_{\lambda'_r} \delta_{\lambda'' \setminus (\lambda'_1 \setminus \alpha)}$. La démonstration précédente montre aussi par récurrence que les parties de cardinal au moins 2 de $\lambda'' \setminus (\lambda'_1 \setminus \alpha)$ sont incluses dans α . Donc $\delta_{\lambda'' \setminus (\lambda'_1 \setminus \alpha)}$ commute avec $\delta_{\lambda'_j}$ pour toute partie λ'_j de λ' distincte de $\lambda'_1, \dots, \lambda'_r$. Si on applique le même raisonnement à chaque partie de λ , on obtient le résultat grâce aux propriétés de commutation. ■

Définissons maintenant une longueur additive sur P . Puisque les relations de 6.1 sont homogènes on obtient une longueur additive sur P en posant $l(\delta_{\{i,j\}}) = 1$ pour toute paire $\{i, j\}$. Cette longueur se prolonge en un homomorphisme noté encore l de B_W dans \mathbb{Z} . Nous allons montrer comment calculer la longueur d'un élément de P à partir de la partition. Soit l_R la longueur sur S_{μ_n} associée au système de générateurs R , c'est-à-dire que $l_R(w)$ est le nombre de facteurs d'une écriture la plus courte possible de w comme produit d'éléments de R . Rappelons qu'on note p l'homomorphisme naturel du groupe de tresses dans le groupe symétrique et que l'ensemble R des réflexions de S_{μ_n} est l'ensemble des transpositions (z, z') avec z et z' dans μ_n .

LEMME 6.9.

- (1) Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \models \mu_n$, on a $l_r(p(\delta_\lambda)) = l(\delta_\lambda) = n - k$.
- (2) Si $\sigma \in S_{\mu_n}$ et $r = (z, z') \in R$ alors

$$l_R(\sigma r) = \begin{cases} l_R(\sigma) - 1 & \text{si } z \text{ et } z' \text{ sont dans la même orbite de } \sigma, \\ l_R(\sigma) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (3) Si $\sigma = r_1 \dots r_k \in S_{\mu_n}$ avec $r_i \in R$ pour tout i et $k = l_R(\sigma)$, alors pour tout $i < k$ la partition définie par les orbites de $r_1 \dots r_i$ est plus fine que celle définie par les orbites de $r_1 \dots r_i r_{i+1}$.

DÉMONSTRATION : Si z et z' sont dans la même orbite d'une permutation σ alors $\sigma.(z, z')$ a une orbite de plus, sinon il a une orbite de moins. Montrons par récurrence sur la longueur que $n - l_R(\sigma)$ est égal au nombre d'orbites de σ . C'est vrai pour la longueur 0 (et aussi pour la longueur 1). Écrivons $\sigma = r_1 \dots r_k$ avec $k = l_R(\sigma)$ et $r_i \in R$. On sait que le nombre d'orbites de σ est au plus $n - k$ car on sait écrire un cycle de longueur j comme produit de $j - 1$ transpositions. Comme $\sigma' = r_1 \dots r_{k-1}$ est de longueur $k - 1$, par récurrence le nombre d'orbites de σ' est $n - k + 1$. Donc le nombre d'orbites de σ est $n - k + 2$ ou $n - k$. Comme il est au plus $n - k$ il est égal à $n - k$. Ceci montre aussi que si $r_k = (z, z')$ alors z et z' ne sont pas dans la même orbite de σ' . Ceci prouve (2) et la deuxième égalité de (1).

La remarque précédente montre aussi que puisque la multiplication par chaque r_i augmente la longueur de 1, les deux éléments de l'orbite non triviale de $r_i = (z, z')$ ne sont pas dans la même orbite de r_{i-1} , donc une des orbites de $r_1 \dots r_i$ est l'union des deux orbites de z et de z' dans $r_1 \dots r_{i-1}$, les autres orbites étant inchangées. Ceci montre (3).

D'autre part comme l est additive et que $l(\delta_{\{z, z'\}}) = 1$ pour tout z et tout z' , pour toute partie $\alpha \subset \mu_n$ on a $l(\delta_\alpha) = |\alpha| - 1$, donc $n - l(\delta_\lambda)$ est égal au nombre de parties de λ pour tout $\lambda \models \mu_n$, ce qui donne la première égalité de (1). ■

Nous pouvons maintenant caractériser la divisibilité dans P . Nous notons M le sous-monoïde de B_W engendré par P .

PROPOSITION 6.10. *Soient λ et λ' deux partitions sans croisements de μ_n alors $\delta_{\lambda'}$ divise δ_λ à gauche ou à droite dans M si et seulement si λ' est plus fine que λ .*

DÉMONSTRATION : On a déjà vu que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe $m \in M$ tel que $\delta_\lambda = \delta_{\lambda'} m$. On a $l(\delta_\lambda) = l(\delta_{\lambda'}) + l(m)$. Donc $l_R(p(\delta_\lambda)) = l_R(p(\delta_{\lambda'})) + l(m)$. Or $l(m) \geq l_R(p(m))$ puisque l'image d'une décomposition de m en produit de générateurs $\delta_{\{i, j\}}$ est une décomposition de $p(m)$ en produit de réflexions. D'autre part la longueur d'un produit ne peut pas être strictement supérieure à la somme des longueurs des facteurs, donc $l_R(p(\delta_\lambda)) \leq l_R(p(\delta_{\lambda'})) + l_R(p(m))$. On en déduit que cette inégalité est une égalité et par application de 6.9 (3) que λ' est plus fine que λ .

Les propriétés 6.1, 6.3, et 6.4 étant symétriques, on peut faire l'analogie de 6.8 et de 6.9 à droite et on obtient le résultat pour la divisibilité à droite. ■

Nous pouvons maintenant prouver

THÉORÈME 6.11. *L'ensemble $P = \{ \delta_\lambda \mid \lambda \models \mu_n \}$ muni de la restriction du produit du groupe de tresses B_W est une structure de Garside.*

DÉMONSTRATION : On sait que le produit est unitaire. Il est associatif grâce à la proposition précédente car si a, b et c sont dans P et si ab et $(ab)c$ sont dans P , la proposition précédente montre que bc est dans P . On a alors $(ab)c = a(bc)$ puisqu'on est dans un groupe. On peut faire le même raisonnement de l'autre côté. On a bien aussi une longueur additive et le seul élément de longueur 0 est 1. L'ensemble des atomes est fini, ce sont les $\delta_{\{i, j\}}$ pour i et j dans μ_n . L'axiome de simplifiabilité (G7) est conséquence du fait qu'on peut simplifier dans le groupe de tresses et que l'homomorphisme naturel qui envoie le monoïde $M(P)$ dans M est injectif sur P par 6.6 (on pourrait aussi envoyer $M(P)$ dans le groupe symétrique et faire le même raisonnement). Les axiomes (G5) et (G6) sont conséquence du fait que deux éléments quelconques de P ont un ppcm. On montre ceci en deux temps. On remarque d'abord qu'étant données deux partitions λ et λ' de μ_n il existe une unique partition minimale pour la finesse et moins fine que λ et λ' : c'est la partition en classes d'équivalences pour la relation engendrée par $z \sim z'$ si la partie de λ contenant z et la partie de λ' contenant z' ont une intersection non vide. On utilise ensuite le fait que pour toute partition λ de μ_n il existe une unique partition minimale pour la finesse, sans croisements, moins fine que λ . On l'obtient en rassemblant les parties de λ

dont les enveloppes convexes ont une intersection non vide. Si on applique successivement ces deux propriétés à deux partitions sans croisements λ et λ' on obtient une partition sans croisements ν telle que δ_ν est le ppcm de δ_λ et $\delta_{\lambda'}$. ■

La proposition 6.10 a aussi la conséquence suivante :

COROLLAIRE 6.12. *L'élément $\delta = \delta_{(\mu_n)}$ est le ppcm de tous les éléments de P .*

Comme P est une structure de Garside et qu'il existe un ppcm de tous les éléments de P , la proposition 5.22 montre que le monoïde engendré par P s'injecte dans le groupe correspondant. D'autre part on sait par 6.1 que ce groupe est isomorphe au groupe de tresses par l'homomorphisme naturel induit par l'identité de P . On en déduit que $M(P)$ est isomorphe au sous-monoïde M engendré par P dans le groupe de tresses. Donnons une application de ce qui précède et du théorème 5.28.

PROPOSITION 6.13. *Le centralisateur de δ^k dans le groupe de tresses est engendré par les δ_λ où λ est une partition de μ_n stable par la rotation de $2k\pi/n$. L'ensemble de ces éléments muni des restrictions du produit et de la longueur est une structure de Garside.*

DÉMONSTRATION : La conjugaison par δ est un automorphisme de la structure de Garside par 6.2. Le centralisateur de δ^k a donc une structure de Garside par 5.28, donnée par l'ensemble des δ_λ stables par conjugaison par δ^k ce qui est équivalent d'après 6.2 au fait que λ est stable par rotation de $2k\pi/n$. ■

En particulier le centralisateur de δ ne contient que les puissances de δ . Considérons maintenant le centralisateur de δ^k quand $1 < k < n$ et k divise n . On sait par 5.28 que dans ce cas les δ_λ où λ parcourt les partitions n'ayant que des parties de cardinal 1 ou 2 et dont les parties de cardinal 2 forment une orbite par la rotation de $2k\pi/n$, engendrent le centralisateur de δ^k .

Généralisation à tous les groupes de tresses de type sphérique. Ce qu'on vient de faire consiste à considérer le produit partiel sur $W = S_n$ restriction du produit dans W aux couples (w, w') tels que $l_R(w) + l_R(w') = l_R(ww')$, à considérer l'ensemble des éléments qui divisent pour ce produit partiel l'élément $s_1 s_2 \dots s_n$, produit de tous les éléments de S dans un certain ordre et à prouver qu'on a ainsi une structure de Garside et que le groupe associé est le groupe de tresses B_W . Un élément tel que $s_1 \dots s_n$ est appelé élément de Coxeter. Les éléments de Coxeter sont tous conjugués dans W (voir [Bbk, IV, §6 no 1 prop. 1]); l'ensemble R , donc la longueur l_R sont stables par conjugaison. On obtient donc des structures isomorphes si on change d'élément de Coxeter. La construction peut être faite pour un groupe de Coxeter sphérique quelconque et les résultats analogues sont vrais (voir [B]).

7. Épilogue : groupes de tresses, systèmes de Tits et algèbres de Hecke. Nous donnons dans ce chapitre quelques indications montrant pourquoi les groupes de tresses interviennent en théorie des groupes algébriques réductifs. Ces groupes ainsi que les groupes de leurs points sur un corps fixé sont munis d'un système de Tits appelé aussi (B, N) -paire. Un système de Tits sur un groupe G est la donnée (*cf.* [Bbk, IV §2]) d'un triplet (B, N, S) où B et N sont des sous-groupes qui engendrent le groupe et tels que $B \cap N$ est normal dans N et où S est une partie génératrice du quotient $W = N/(B \cap N)$ formée d'éléments d'ordre 2, le tout soumis aux axiomes suivants :

- (1) Pour $s \in S$ et $w \in W$ on a $BsBwB \subset BswB \cup BwB$.
- (2) $BsBsB \not\subset B$

Ces écritures ont un sens car $w \in W$ est une classe modulo $B \cap N$, donc BwB est bien défini.

EXEMPLES. On obtient par exemple un système de Tits dans le groupe linéaire $GL_n(k)$ sur tout corps k en prenant pour B l'ensemble des matrices inversibles triangulaires supérieures et pour N l'ensemble des matrices monomiales (*i.e.*, ayant exactement un coefficient non nul dans chaque ligne et dans chaque colonne). L'intersection $B \cap N$ est formée des matrices diagonales. Le quotient $N/(B \cap N)$ est isomorphe au groupe symétrique et on prend pour S des générateurs de Coxeter du groupe symétrique. On a une structure analogue pour un groupe spécial linéaire, symplectique ou orthogonal par exemple.

On démontre que pour un système de Tits (W, S) est un groupe de Coxeter et que le groupe tout entier est l'union (disjointe) des double-classes BwB quand w parcourt W (décomposition de Bruhat). On démontre aussi que pour $s \in S$ et $w \in W$ on a $BwBsB = BwsB$ si et seulement si $l(ws) = l(w) + 1$ et $BwBsB = BwB \cup BwsB$ sinon. On en déduit que $BwBw'B = Bww'B$ si et seulement si les longueurs de w et w' s'ajoutent.

Considérons la famille X des sous-ensembles de G de la forme $Bw_1Bw_2B \dots Bw_kB$ où (w_1, \dots, w_k) est une suite d'éléments de W . Alors X est muni d'un produit qui en fait un monoïde. L'ensemble $P = \{BwB \mid w \in W\}$ est donc muni d'un produit partiel qui est le même que le produit partiel dans B_W^{red} d'après les propriétés précédentes. On en déduit un morphisme surjectif de monoïdes de B_W^+ dans X .

Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire que toute double-classe BwB contient un nombre fini de classes à gauche de G modulo B (si cette propriété est vraie pour tout $w \in S$ elle est vraie pour tout w). On peut alors faire agir G sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{C}^{(G/B)}$ (espace vectoriel de base indexée par les classes de G modulo B), par linéarisation de l'action de G sur G/B par multiplication à gauche. On a aussi une action à droite de B_W sur cet espace : l'élément \mathbf{w} envoie l'élément de base gB sur $\sum_{hB \subset gBwB} hB$. Cette action commute à l'action de G . On la prolonge linéairement à l'algèbre $\mathbb{C}[B_W]$ du groupe B_W . On peut prouver

THÉORÈME 7.1.

- (1) L'image \mathcal{H}_W de $\mathbb{C}[B_W]$ dans $\text{End}(\mathbb{C}^{(G/B)})$ est formée de tous les endomorphismes qui commutent à l'action de G .

- (2) L'image T_s de s dans $\text{End}(\mathbb{C}^{G/B})$ vérifie $(T_s + 1)(T_s - |BsB/B|) = 0$.
 (3) Les images T_w des éléments w de B_W^{red} forment une base de \mathcal{H}_W .

Pour la démonstration de ces résultats, voir [Bbk, IV §2, exercices 22 à 24].

DÉFINITION 7.2. L'algèbre \mathcal{H}_W ci-dessus est appelée l'algèbre de Hecke du système de Tits.

L'algèbre de Hecke ne dépend que de W et des paramètres qui interviennent dans (2) ci-dessus. L'algèbre de Hecke définie ici est en fait l'algèbre opposée à l'algèbre de Hecke traditionnelle car l'action définie ci-dessus du groupe de tresses est une action à droite.