

Fonctions sur l'ensemble des diagrammes de Young : caractères du groupe symétrique et polynômes de Kerov

Résumé de la thèse de Valentin Féray

Comme dans tout groupe fini, l'étude des représentations du groupe symétrique se ramène au calcul des caractères irréductibles. L'objet central de cette thèse est l'étude des valeurs du caractère irréductible (renormalisé) comme fonction de la partition indexant la représentation (et non de la permutation sur laquelle on calcule le caractère). La première partie est une introduction présentant les résultats nouveaux de cette thèse dans leur contexte scientifique.

Dans la deuxième partie, nous établissons une formule combinatoire pour les valeurs des caractères. Cette formule, conjecturée par R.P. Stanley, donne l'expression du caractère normalisé en fonction des coordonnées des diagrammes multirectangulaires. Deux preuves sont proposées dans ce mémoire. La première utilise les propriétés des éléments de Jucys-Murphy et les fonctions de Schur décalées. La seconde est un calcul de trace dans l'algèbre du groupe symétrique : elle utilise le fait que les représentations irréductibles peuvent être décrites par les projecteurs de Young.

Un des intérêts de cette formule est que sa complexité ne dépend que de la taille du support de la permutation et non de la taille de la permutation elle-même. Elle est donc très adaptée à une étude asymptotique du caractère sur une permutation fixée (complétée par des points fixes) quand la taille du groupe symétrique tend vers l'infini. On retrouve ainsi la formule combinatoire de l'équivalent homogène du caractère sur un cycle ainsi qu'une borne supérieure optimale à un facteur multiplicatif près. Cette borne peut être étendue à des permutations dont la longueur varie, améliorant ainsi les précédents résultats dans ce domaine.

Dans la troisième partie, nous étudions en détail l'expression des caractères en fonction des cumulants libres (observables du diagramme qui apparaissent naturellement dans des problèmes asymptotiques). Encore une fois, nous proposons deux approches différentes au problème, utilisant toutes les deux la formule précédente. La première fait apparaître de la combinatoire sur des cartes. En effet, le caractère s'écrit comme une somme alternée de fonctions sur les diagrammes de Young indexées par des cartes. Nous étudions en détail ces fonctions et leurs relations. On définit ainsi une décomposition canonique des cartes étiquetées en somme alternée de produits d'arbres permettant d'interpréter combinatoirement les coefficients des polynômes de Kerov. Avec cette méthode, nous prouvons une version généralisée d'une conjecture de positivité de Kerov et calculons les valeurs de certains coefficients.

La seconde manière d'aborder le problème est d'utiliser d'autres observables des diagrammes de Young. Ceci permet d'exprimer les coefficients des polynômes de Kerov comme une somme alternée de nombre de factorisations vérifiant des propriétés données. Après un travail combinatoire non trivial, nous simplifions cette expression pour obtenir une interprétation combinatoire explicite des coefficients.

La quatrième partie de ce mémoire est un peu à part. Elle montre comment la structure combinatoire qui est ressortie de l'étude des polynômes de Kerov peut être utilisée dans un autre domaine : l'étude d'identités sur des fractions rationnelles. On définit dans cette partie une famille de fractions rationnelles indexées par des graphes. Or elles vérifient des relations très proches de celles des fonctions sur les diagrammes de Young évoquées ci-dessus. Ces relations donnent un algorithme de calcul et permettent de montrer facilement (par récurrence) des liens entre propriétés algébriques des fonctions et combinatoire des graphes. Le fait que la structure de cartes joue un rôle important pour l'étude des polynômes de Kerov invite à munir dans ce problème les graphes d'une structure arbitraire de cartes. On obtient alors une formule combinatoire non récursive pour notre fraction rationnelle.