

Matrices aléatoires non commutatives et mesure de Plancherel

Valentin Féray

Laboratoire d'Informatique de l'Institut Gaspard-Monge, Université Paris-Est

Séminaire du laboratoire, 8 avril 2008



Cadre de travail

- Notation : S_n groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$
- Représentations irréductibles de $S_n \simeq$ partitions $\lambda \vdash n$.
- Objectif : Etudier *asymptotiquement* la forme de certaines partitions.

Plan

- 1 Matrice de Biane et mesure de Plancherel
 - Diagramme de Young et mesure de transition
 - Outil d'étude

Plan

- 1 Matrice de Biane et mesure de Plancherel
 - Diagramme de Young et mesure de transition
 - Outil d'étude
- 2 Lien avec le comportement de matrices gaussiennes
 - Trace et chemins
 - Cas d'une matrice gaussienne
 - Cas de la matrice de Biane

Plan

- 1 Matrice de Biane et mesure de Plancherel
 - Diagramme de Young et mesure de transition
 - Outil d'étude
- 2 Lien avec le comportement de matrices gaussiennes
 - Trace et chemins
 - Cas d'une matrice gaussienne
 - Cas de la matrice de Biane
- 3 Étude combinatoire plus fine

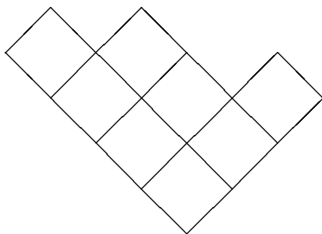
Partitions et diagrammes de Young

Une partition λ d'un entier $n \geq 0$ est une suite décroissante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ de somme n .

Partitions et diagrammes de Young

Une partition λ d'un entier $n \geq 0$ est une suite décroissante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ de somme n .

Représentation graphique par un diagramme de Young (à la russe) :

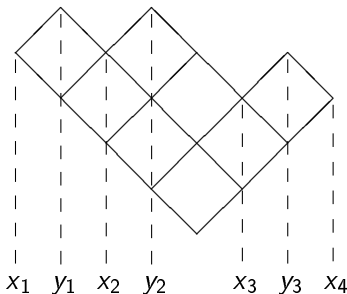


$$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = \lambda_3 = 2; \lambda_4 = 1; \lambda_5 = \dots = 0.$$

Partitions et diagrammes de Young

Une partition λ d'un entier $n \geq 0$ est une suite décroissante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ de somme n .

Représentation graphique par un diagramme de Young (à la russe) :



Mesure de transition

diagramme de Young $\lambda \vdash n$ \rightarrow mesure de transition \mathfrak{m}_λ

La mesure \mathfrak{m}_λ est la mesure de probabilité sur \mathbb{R} définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mathfrak{m}_\lambda(s)}{z-s} = \frac{\prod_i z - y_i}{\prod_i z - x_i}$$

Mesure de transition

diagramme de Young $\lambda \vdash n \rightarrow$ mesure de transition \mathfrak{m}_λ

La mesure \mathfrak{m}_λ est la mesure de probabilité sur \mathbb{R} définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mathfrak{m}_\lambda(s)}{z-s} = \frac{\prod_i z - y_i}{\prod_i z - x_i}$$

\mathfrak{m}_λ est supportée par

$$\{x_i\} \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{endroits où on peut ajouter} \\ \text{une case au diagramme } \lambda \vdash n \\ \text{pour obtenir un autre diagramme } \mu \vdash n+1 \end{array} \right\}$$

Génération aléatoire de diagramme

- Interprétation : mesure de transition entre diagrammes.

- Itération depuis $\square \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{mesure de Plancherel :} \\ \text{mesure de proba } P^n \text{ sur} \\ \text{les diagrammes à } n \text{ cases} \end{array} \right.$

Objectif : Calculer les moments de la mesure

$$m_{P^n} = \sum_{\lambda \vdash n} P^n(\lambda) m_\lambda$$

→ permet de connaître la forme limite des diagrammes.

Autre question liée

- On tire une permutation de longueur n au hasard

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 1 | 5 | 6 | 4 | 7 | 2 |

Autre question liée

- On tire une permutation de longueur n au hasard

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 1 | 5 | 6 | | 7 | |

- Distribution de la longueur maximale d'une sous suite croissante (ici 4) ?

Autre question liée

- On tire une permutation de longueur n au hasard

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & & 1 & 5 & 6 & & 7 \end{array}$$

- Distribution de la longueur maximale d'une sous suite croissante (ici 4) ?

Proposition

*Distribution de la
longueur maximale d'une
sous-suite croissante*

=

*Distribution de la première
ligne d'une partition
sous la mesure de Plancherel*

Formule pour les moments

Notation (Matrice de Biane)

Soit $(i j)$ la transposition échangeant i et j de S_n , posons :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & (1\ 2) & \dots & (1\ n) \\ 1 & (2\ 1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (n-1\ n) \\ 1 & (n\ 1) & \dots & (n\ n-1) & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition

$$\mathcal{M}_s(\mathfrak{m}_{P^n}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \operatorname{tr}(B_n^s)\right) \text{ où } \begin{cases} \mathbb{E}(\operatorname{Id}) = 1 \\ \mathbb{E}(\sigma) = 0 \text{ si } \sigma \neq \operatorname{Id} \end{cases}$$

En fait...

- Le comportement limite de la mesure P^n est bien connu :
forme limite, oscillation autour de la forme limite, oscillation
d'un nombre fixé de lignes autour de leur longueur moyenne...
- Mais... la matrice de Biane *pourrait* permettre d'étudier
d'autres mesures apparaissant dans la théorie des
représentations du groupe symétrique.

Combinatoire de la trace d'une puissance matricielle

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice $n \times n$.

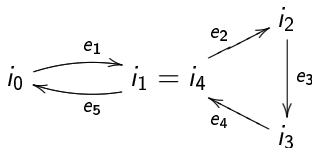
$$\operatorname{tr}(A^s) = \sum_{1 \leq i_0, \dots, i_{s-1} \leq n} a_{i_0, i_1} a_{i_1, i_2} \cdots a_{i_{s-2}, i_{s-1}} a_{i_{s-1}, i_0}$$

Combinatoire de la trace d'une puissance matricielle

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice $n \times n$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A^s) &= \sum_{1 \leq i_0, \dots, i_{s-1} \leq n} a_{i_0, i_1} a_{i_1, i_2} \cdots a_{i_{s-2}, i_{s-1}} a_{i_{s-1}, i_0} \\ &= \sum_{C=(e_j)_{1 \leq j \leq s}} a_{e_1} \cdots a_{e_s} \end{aligned}$$

où la somme parcourt les chemins fermés de longueurs s dans le graphe complet à n sommets.



Asymptotique

Question : asymptotique de $\mathbb{E}(\text{tr}(A^s))$ quand $\begin{cases} n \rightarrow \infty \\ s \text{ fixe} \end{cases}$?

Hypothèse :

$$\mathbb{E}(a_{i_0, i_1} a_{i_1, i_2} \cdots a_{i_{s-2}, i_{s-1}} a_{i_{s-1}, i_0})$$

ne dépend que de la forme du chemin correspondant (et pas des étiquettes des sommets).

Asymptotique

Question : asymptotique de $\mathbb{E}(\text{tr}(A^s))$ quand $\begin{cases} n \rightarrow \infty \\ s \text{ fixe} \end{cases}$?

Hypothèse :

$$\mathbb{E}(a_{i_0, i_1} a_{i_1, i_2} \cdots a_{i_{s-2}, i_{s-1}} a_{i_{s-1}, i_0})$$

ne dépend que de la forme du chemin correspondant (et pas des étiquettes des sommets).

$$\text{Alors } \mathbb{E}(\text{tr}(A^s)) = \sum_{\substack{\mathcal{C} \text{ forme} \\ \text{de chemin}}} n(n-1)\dots(n-|\mathcal{C}|+1) \mathbb{E}(\mathcal{C})$$

On cherche les chemins avec un nombre de sommets maximal parmi ceux vérifiant $\mathbb{E}(\mathcal{C}) \neq 0$.

Modèle gaussien

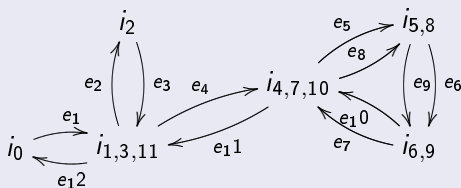
Hypothèse : A symétrique et les $(a_{i,j})_{i \geq j}$ sont des variables gaussiennes de variance 1 **indépendantes**.

Modèle gaussien

Hypothèse : A symétrique et les $(a_{i,j})_{i \geq j}$ sont des variables gaussiennes de variance 1 **indépendantes**.

Alors seuls les chemins pairs (*i.e.* les chemins où toutes les arêtes sont parcourues un nombre pair de fois) ont une contribution non nulle à \mathbb{E} .

Exemple (chemin pair)



Terme dominant

Soit i un chemin pair avec $|\{j_j\}| \geq s + 1$.

\exists sommet i_k par lequel on ne passe qu'une fois.

Alors $i_{k-1} = i_{k+1}$.

Terme dominant

Soit i un chemin pair avec $|\{j_j\}| \geq s + 1$.

\exists sommet i_k par lequel on ne passe qu'une fois.

$$\text{Alors } i_{k-1} = i_{k+1}.$$

Cardinal maximal : $s + 1$

Nombre de *formes de chemins* correspondantes : $C_s = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s}$

Transposition du cas gaussien

Remarque : On oubliera la présence de la ligne et de la colonne de 1 qui ne change pas le résultat.

Soit i une suite (dite admissible) telle que :

$$(i_0 i_1)(i_1 i_2) \dots (i_{s-2} i_{s-1})(i_{s-1} i_0) = \text{Id}$$

Alors, si $\nexists j \neq k : i_j = i_k$, nécessairement

$$i_{k-1} = i_{k+1}$$

Comparaison des asymptotique

→ Même comportement asymptotique des chemins que les matrices gaussiennes :

Théorème

$$\mathcal{M}_{2s}(\mathfrak{m}_{P^n}) \sim C_s n^s$$

Avec des renormalisations adéquates, la limite de la mesure \mathfrak{m}_{P^n} est la distribution asymptotique des valeurs propres d'une matrice Gaussienne (i.e. loi du demi cercle).

Et pour s plus grand...

Proposition

L'asymptotique

$$\mathcal{M}_{2s}(\mathfrak{m}_{P_n}) \sim C_s n^s$$

est encore valable pour $s = o(n^{1/3})$

Motivation : comportement des *premières lignes* d'une partition aléatoire ?

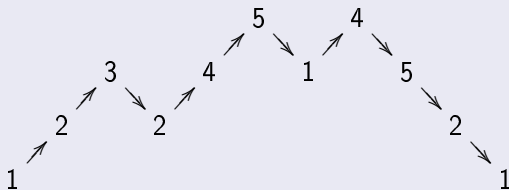
Proposition \Rightarrow oscillation des premières lignes est d'ordre inférieure ou égale à $n^{1/3}$

Suites admissibles et chemins de Dick

Chemin de Dick

$$i \text{ suite admissible} \longrightarrow y_k = \left| \underbrace{(i_0 i_1) \dots (i_{k-1} i_k)}_{\sigma_k} \right|$$

Exemple

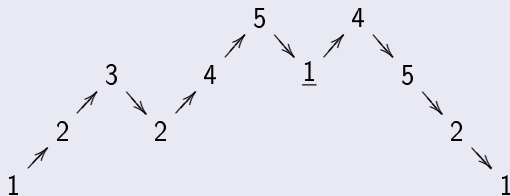


Suites admissibles et chemins de Dick

Chemin de Dick

$$i \text{ suite admissible} \longrightarrow y_k = \underbrace{|(i_0 i_1) \dots (i_{k-1} i_k)|}_{\sigma_k}$$

Exemple

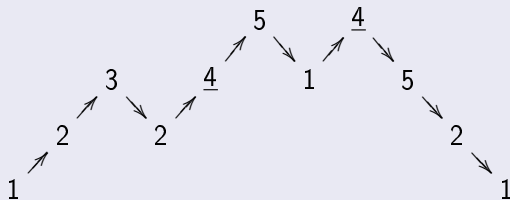


Choix canonique pour les descentes : $i_{k+1} = \sigma_k^{-1}(i_k)$ (ici 1 choix non canonique).

Suites admissibles et chemins de Dick

i suite admissible \longrightarrow Chemin de Dick $y_k = \underbrace{|(i_0 i_1) \dots (i_{k-1} i_k)|}_{\sigma_k}$

Exemple



1 répétition parmi les arrivées des pas montants

Esquisse de preuve

Terme dominant à s fixe : suites sans répétitions \Rightarrow que des choix canoniques.

Esquisse de preuve

Terme dominant à s fixe : suites sans répétitions \Rightarrow que des choix canoniques.

Lemme

Le nombre de choix non canoniques est majoré par le nombre de répétitions *non effaçables*.

Esquisse de preuve

Terme dominant à s fixe : suites sans répétitions \Rightarrow que des choix canoniques.

Lemme

Le nombre de choix non canoniques est majoré par le nombre de répétitions *non effaçables*.

Introduire un choix non canonique multiplie le nombre de suite par :

- αs (nombre de positions)
- $\alpha y_k \sim \alpha \sqrt{s}$ (nombre de valeurs possibles)
- $\alpha s \sqrt{s}$ (idem : position et valeurs de la répétition)
- $\alpha \frac{1}{n}$ (un choix de valeurs en moins dû à la répétition)

i.e. par $\alpha \frac{s^3}{n}$, CQFD !