Licence Informatique — **4TIN501U – Algorithmique des graphes**
Université de Bordeaux — **Aucun document autorisé**

Devoir Surveillé du 5 novembre 2019
durée 1h30

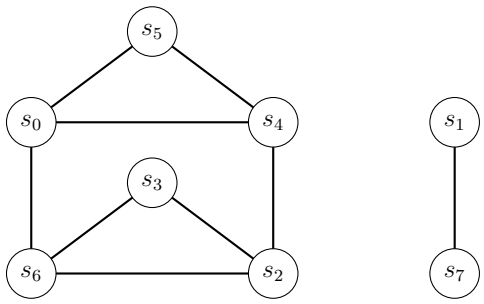
Dans tout le sujet, on conviendra que, dans les différentes structures de données modélisant les graphes, les sommets sont rangés dans l'ordre croissant de leur numéro.

Exercice 1

Soit le graphe simple, non orienté $G = (V, E)$, donné par sa matrice d'incidence ci-dessous.

$$\begin{array}{c} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe G.



2. Quel est son degré minimum ? Son degré maximum ? Est-il connexe ?
   $d_{\min}(G) = 1$, $d_{\max}(G) = 3$ et G n'est pas connexe (il contient 2 composantes connexes).
3. Appliquer l'algorithme du ***parcours en largeur*** `PL`(G, s_0) pour calculer la distance entre le sommet s_0 et tous les autres sommets. Expliciter l'ordre dans lequel les sommets sont enfilés (et donc défilés) dans la file `F`, ainsi que les valeurs de `pere[`v`]` et `d[`v`]` pour tous les sommets dans un tableau. Vous prendrez soin de ranger dans l'entrée du tableau les sommets par ordre lexicographique.

v	`pere[`v`]`	`d[`v`]`
s_0	`nil`	0
s_1	`nil`	∞
s_2	s_4	2
s_3	s_6	2
s_4	s_0	1
s_5	s_0	1
s_6	s_0	1
s_7	`nil`	∞

F	s_0	s_4	s_5	s_6	s_2	$s_3 \Longleftarrow$

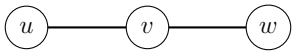
Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes décider si elle est vraie ou fausse ; si elle est vraie, donner une preuve, si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Soit u et v deux sommets (distincts) d'un graphe non-orienté tels que $dist(u, v) = k$ (pour un $k \geq 1$). Alors il existe un sommet w voisin de v tel que $dist(u, w) = k - 1$. Vrai ou faux ?

   VRAI. Preuve (par l'absurde) : Tout d'abord, la proposition est vraie pour $k = 1$ où u et v voisin (dans ce cas $w \equiv u$). Pour $k \geq 2$, si $dist(u, v) = k$, alors il existe une chaîne élémentaire entre u et v de longueur k. Cette chaîne emprunte forcément un voisin de v que l'on notera w. Il existe une chaîne entre u et w de longueur $k-1$, donc $dist(u, w) \leq k-1$. Si $dist(u, w) \leq k - 2$, alors en ajoutant l'arête (w, v), nous aurions $dist(u, v) \leq k - 1$, ce qui n'est pas possible. Ainsi, il existe au moins un voisin w de v tel que $dist(u, w) = k-1$.
2. Soit u et v deux sommets (distincts) d'un graphe non-orienté. Supposons qu'il existe un sommet w voisin de v tel que $dist(u, w) = k-1$ pour un k entier naturel. Alors on a dans ce cas là $dist(u, v) = k$. Vrai ou faux ?

   FAUX. La preuve est donné par le contre-exemple suivant :

   u et v sont bien deux sommets distincts, w est un voisin de v et $dist(u, w) = 2$, pourtant $dist(u, v) \neq 3$.

Exercice 3

1. Soit G un graphe non-orienté simple ayant n sommets et soit s un de ses sommets. Le graphe G étant représenté par matrice d'adjacence $A[i, j]$, proposer un algorithme qui détermine si s a au moins un voisin de degré 1. Quel est la complexité de votre algorithme dans le meilleurs des cas ? Dans le pire des cas ? Justifier votre réponse.
   Solution :

```
AuMoinsUnVoisinDeDegre1(G,s):
   pour tout j de 1 à n faire
      si A[s,j] ==  1
        alors compteur = 0
              pour tout i de 1 à n faire
                 compteur = compteur + A[j,i]
              si compteur == 1
                alors renvoyer VRAI
   renvoyer FAUX
```

   Dans le meilleur des cas : $O(n)$ le premier sommet adjacent à `s` a degré 1. Dans ce cas la boucle `pour tout i de 1 à n` est exécutée une seule fois.
   Dans le pire des cas : $O(n^2)$ si `s` a degré $n - 1$ et aucun de ses voisins n'a degré 1. Dans ce cas la boucle `pour tout i de 1 à n` est exécutée $n - 1$ fois.
2. Soit G un graphe non-orienté non simple représenté par listes de successeurs $Adj[u]$. Proposer un algorithme qui détermine si tous les sommets du graphe sont origine (et extrémité) d'une boucle. Quel est la complexité de votre algorithme dans le meilleurs des cas ? Dans le pire des cas ? Justifier votre réponse.
   Solution :

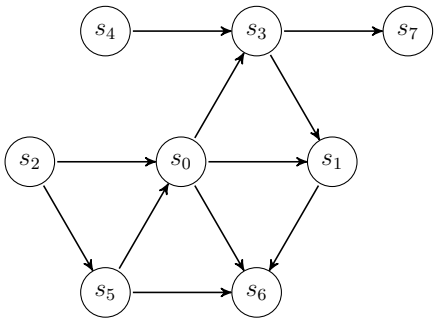
```
ontTousBoucle(G):
   pour tout sommet u de X(G):
      existeBoucle = FAUX
      pour chaque v de Adj[u] faire
          si v == u
            alors existeBoucle = VRAI
      si non existeBoucle
        alors renvoyer FAUX
   renvoyer VRAI
```

Dans les meilleur des cas : $O(deg(s_0))$, où s_0 est le premier sommet du graphe et il n'y a pas de boucle autour de s_0.
Dans le pire des cas : $O(n+m)$ où m est le nombre d'arêtes du graphes et la fonction renvoie `VRAI` après avoir visité tous les sommets et parcouru toutes les listes de successeurs.

Exercice 4

L'objectif de cet exercice est de concevoir un algorithme qui, étant donné un graphe orienté G sans circuit et deux sommets s et t de G, calcule le nombre de chemins de s à t en temps linéaire.

1. Soit G_1 le graphe dessiné ci-après. Expliciter tous les chemins de s_5 à s_6 (il y en a quatre).



(s_5, s_6)
$(s_5, s_0), (s_0, s_6)$
$(s_5, s_0), (s_0, s_1), (s_1, s_6)$
$(s_5, s_0), (s_0, s_3), (s_3, s_1), (s_1, s_6)$

2. Effectuer le parcours en profondeur de G_1 en explicitant, dans un tableau, les dates de début et de fin de visite, ainsi que le père pour chaque sommet de G_1.

v	`pere`$[v]$	`d`$[v]$	`f`$[v]$
s_0	`nil`	1	10
s_1	s_0	2	5
s_2	`nil`	11	14
s_3	s_0	6	9
s_4	`nil`	15	16
s_5	s_2	12	13
s_6	s_1	3	4
s_7	s_3	7	8

3. Soit G un graphe orienté sans circuit quelconque. Soit t un sommet de G. Pour tout sommet u de G, notons $c[u]$ le nombre de chemins allant de u à t dans G. En particulier,

on a $c[t] = 1$ et $c[x] = 0$ pour tout sommet x depuis lequel t n'est pas accessible. Montrer que pour tout sommet u on a

$$c[u] = \sum_{uv \in E(G)} c[v]$$

où la somme prend en compte tous les voisins sortants (les successeurs) v de u.

Solution

Comme le graphe est sans circuit, il existe un ordre topologique de G. Si l'on cherche à dénombrer tous les chemins issus de u vers t, alors aucun de ces chemins ne peut emprunter un prédécesseur de u dans l'ordre topologique.

Les chemins issus de u (s'ils existent) empruntent forcément un ou des successeurs de u. Soit v_i un successeur de u. Les chemins issus de v_i vers t sont par définition tous distincts. Soit v_j un successeur de s avec v_j distinct de v_i. Alors tous les chemins issus de v_i vers t sont distincts des chemins issus de v_j vers le sommet t, car les chemins issus de v_i débutent par v_i alors que les chemins issus de v_j débutent par v_j avec v_i et v_j distincts. Supposons que v_i ait k chemins distincts vers t. Supposons que depuis u il y ait α arcs distincts $(a_1, a_2, \ldots, a_\alpha)$ vers v_i. Alors en rajoutant au début de chacun de ces k chemins l'arc a_i $(1 \leq i \leq k)$ il y aura aussi k chemins issus de u passant par l'arc a_i et par v_i et aboutissant sur t. Comme les chemins issus de deux successeurs distincts de u sont aussi tous distincts on peut répéter le raisonnement pour chaque successeur de u, on obtient bien que le nombre de chemins issus de u vers t est bien la somme des nombres de chemins issus des sommets extrémités de chaque arcs sortant de u.

4. Calculer les valeurs des étiquettes $c[\,]$ pour les sommets du graphe G_1 et $t = s_6$.

v	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
$c[v]$	3	1	7	1	1	4	1	0

Afin de répondre au problème cité au début de l'exercice, il suffit en fait de calculer $c[s]$. Nous allons quand même calculer $c[u]$ pour tout sommet de G, et cela pendant un (et un seul) parcours en profondeur. Rappelons que dans un graphe orienté G sans circuit, si uv est un arc, alors $f(v) < f(u)$ (où $f(x)$ désigne la date de fin de visite de x pour un sommet x de G). Ceci dit, observons que la formule de la question 3 peut être appliquée au moment de la fin de visite pour calculer $c[u]$, à condition que les valeurs de $c[v]$ pour ses voisins sortants soient déjà connues.

5. Modifier l'algorithme `PP(G)` en `NB_CHEMINS(G, s, t)` ainsi que la fonction `Visiter(u)` pour mettre en place le calcule de $c[u]$ pendant un parcours en profondeur. Expliciter les numéros de lignes à modifier et/où à ajouter au code existant. Ne pas oublier l'initialisation des étiquettes $c[\,]$.

```
0   NB_CHEMINS(G, s, t)
1     pour chaque sommet u de V faire
2         couleur[u] <- BLANC
3         pere[u] <- nil
4   *     c[u] = 0
5   * c[t] = 1
6     temps <- 0
7     pour chaque sommet u de V faire
8         si couleur[u] = BLANC
9             alors Visiter(u)
10  * return c[s]
```

```
0   Visiter(u)
1     couleur[u] <- GRIS
2     d[u] <- temps <- temps + 1
3     pour chaque v de Adj[u] faire
4         si couleur[v] = BLANC
5             alors pere[v] <- u
6                   Visiter_PP(v)
7   *     c[u] = c[u] + c[v]
8     couleur[u] <- NOIR
9     f[u] <- temps <- temps + 1
```

Rappel :

```
0   PP(G)
1     pour chaque sommet u de V faire
2         couleur[u] <- BLANC
3         pere[u] <- nil
4     temps <- 0
5     pour chaque sommet u de V faire
6         si couleur[u] = BLANC
7             alors Visiter_PP(u)
```

```
0   Visiter_PP(u)
1     couleur[u] <- GRIS
2     d[u] <- temps <- temps + 1
3     pour chaque v de Adj[u] faire
4         si couleur[v] = BLANC
5             alors pere[v] <- u
6                   Visiter_PP(v)
7     couleur[u] <- NOIR
8     f[u] <- temps <- temps + 1
```

```
0   PL(G,s)
1     pour chaque sommet u de V[G] \ {s} faire
2         couleur[u] <- BLANC
3         d[u] <- infini
4         pere[u] <- nil
5     couleur[s] <- GRIS
6     d[s] <- 0
7     pere[s] <- nil
8     Enfiler(F, s)
9     tant que non vide(F) faire
10        u <- tete(F)
11        pour chaque v de Adj(u) faire
12            si couleur[v] = BLANC
13                alors couleur[v] <- GRIS
14                      d[v] <- d[u] + 1
15                      pere[v] <- u
16                      Enfiler(F, v)
17        Defiler(F)
18        couleur[u] <- NOIR
```