Algorithmique des graphes

Cours 4 – Parcours en profondeur

František Kardoš

frantisek.kardos@u-bordeaux.fr

Parcours en profondeur : le principe

Exploration d'un graphe donné par un agent mobile. Il peut se déplacer d'un sommet au voisin en suivant une arête les reliant.

Parcours en profondeur : le principe

Exploration d'un graphe donné par un agent mobile. Il peut se déplacer d'un sommet au voisin en suivant une arête les reliant.

L'agent marque des sommets pour savoir s'il les a déjà découverts. Un sommet est marqué dès que l'agent le découvre (pour la première fois).

Initialement, aucun sommet n'est marqué.

Parcours en profondeur : le principe

Pour décider par quelle arête il va partir d'un sommet, il privilégie toute autre arête à celle qui lui a servi à découvrir le sommet actuel.

Parcours en profondeur : le principe

Pour décider par quelle arête il va partir d'un sommet, il privilégie toute autre arête à celle qui lui a servi à découvrir le sommet actuel.

S'il retrouve un sommet déjà découvert en franchissant une arête, il fait un demi-tour immédiatement.

Parcours en profondeur : le principe

Pour décider par quelle arête il va partir d'un sommet, il privilégie toute autre arête à celle qui lui a servi à découvrir le sommet actuel.

S'il retrouve un sommet déjà découvert en franchissant une arête, il fait un demi-tour immédiatement.

Il déclare un sommet *u visité* s'il a déjà exploré tout ce qui était accessible et non-découvert à partir de *u* au moment où celui-ci a été découvert. Il termine la visite de *u* par le retour par l'arête de découverte de *u*.

Parcours en profondeur : l'algorithme brut

Algorithme 1 : Parcours en profondeur DFS(G)

Données : graphe G, marque des sommets (initialisé à Faux), père π des sommets (initialisée à null)

```
début
    pour chaque s sommet de G faire
        si s non marqué alors
            Visiter(s) ;
        fin
    fin
fin
```

Algorithme 2 : fonction récursive Visiter(u)

```
début
    marque[u] ← Vrai ;
    pour chaque v voisin de u faire
        si v non marqué alors
            π[v] ← u ;
            Visiter(v) ;
        fin
    fin
fin
```

Parcours en profondeur

- Tout sommet du graphe est visité (et marqué) une et une seule fois
- À la fin, tous les sommets sont marqués
- Chaque sommet a au maximum un père
- Certaines arêtes sont des *arêtes de liaison* – celles reliant un sommet à son père
- Le graphe composé des arêtes de liaison est sans cycle

Parcours en profondeur

- Une fois le sommet de départ s choisi, l'algorithme visite tous le sommets accessibles depuis s
- Il est impossible qu'il reste une arête (un arc) reliant un sommet marqué à un autre sommet non marqué
- L'algorithme utilise implicitement une pile (LIFO) pour stocker des appels récursifs à la fonction Visiter(u)
- À n'importe quel moment du déroulement de l'algorithme, en tête de la pile est le sommet actuel, précédé par la suite de ses ancêtres

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

$A : B, G$
$B : A, E, G$
$C : G$
$D : E, F$
$E : B, D, F, G$
$F : D, E$
$G : A, B, C, E$

Pile :

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

A :
B, G
B : A, E, G
C : G
D : E, F
E : B, D, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E

Pile : A

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

A : $\underline{B}$, G
B : A, E, G
C : G
D : E, F
E : B, D, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E

Pile : A, B

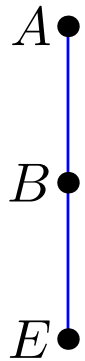
Parcours en profondeur – graphes non-orientés

A : B, G
B : A, E, G
C : G
D : E, F
E : B, D, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E

Pile : A, B

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

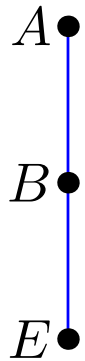
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : E, F
E : B, D, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

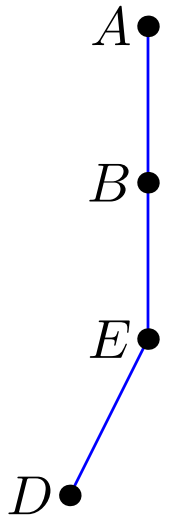
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : E, F
E : $\underline{B}$, D, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

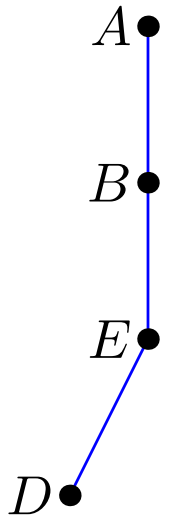
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : E, F
E : $\underline{B}$, $\underline{D}$, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E, D

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

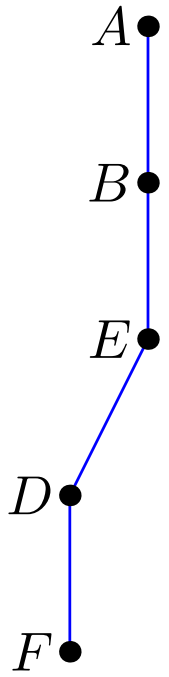
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : $\underline{E}$, F
E : $\underline{B}$, $\underline{D}$, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E, D

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

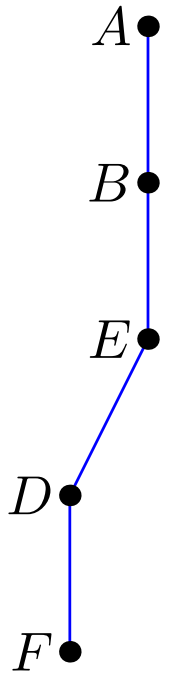
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : $\underline{E}$, $\underline{F}$
E : $\underline{B}$, $\underline{D}$, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E, D, F

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

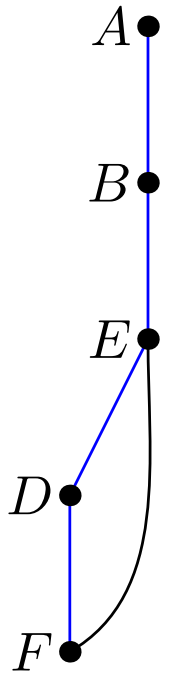
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : $\underline{E}$, $\underline{F}$
E : $\underline{B}$, $\underline{D}$, F, G
F : $\underline{D}$, E
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E, D, F

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

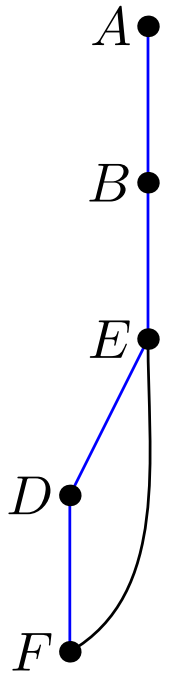
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : $\underline{E}$, $\underline{F}$
E : $\underline{B}$, $\underline{D}$, F, G
F : $\underline{D}$, $\underline{E}$
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E, D, F

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

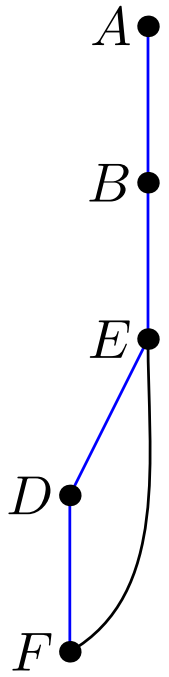
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : $\underline{E}$, $\underline{F}$
E : $\underline{B}$, $\underline{D}$, F, G
F : $\underline{D}$, $\underline{E}$
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E, D

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

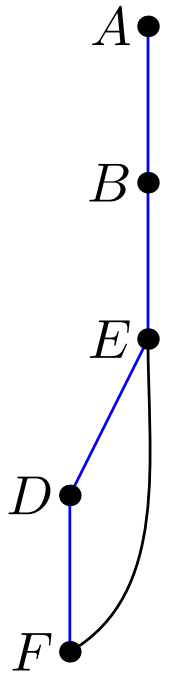
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : $\underline{E}$, $\underline{F}$
E : $\underline{B}$, $\underline{D}$, F, G
F : $\underline{D}$, $\underline{E}$
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

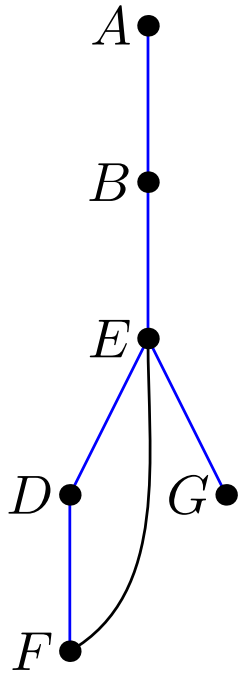
A : $\underline{B}$, G
B : $\underline{A}$, $\underline{E}$, G
C : G
D : $\underline{E}$, $\underline{F}$
E : $\underline{B}$, $\underline{D}$, $\underline{F}$, G
F : $\underline{D}$, $\underline{E}$
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

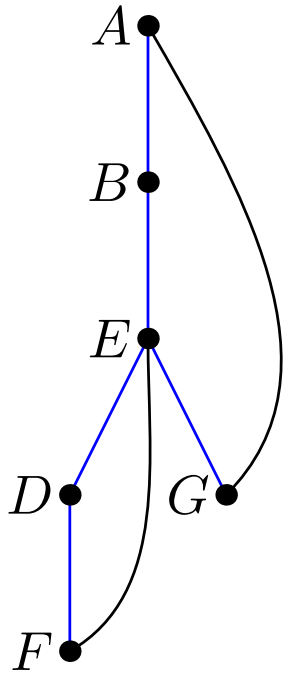
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, G$
C : G
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : A, B, C, E



Pile : A, B, E, G

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

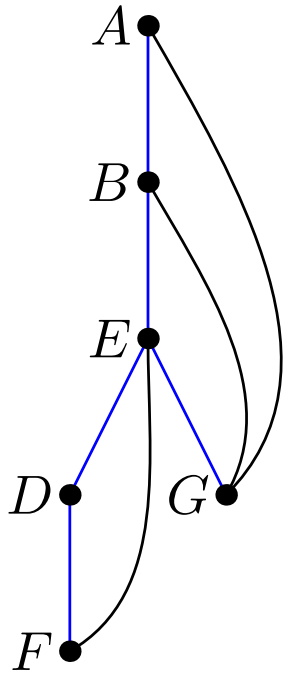
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, G$
C : G
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, B, C, E$



Pile : A, B, E, G

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

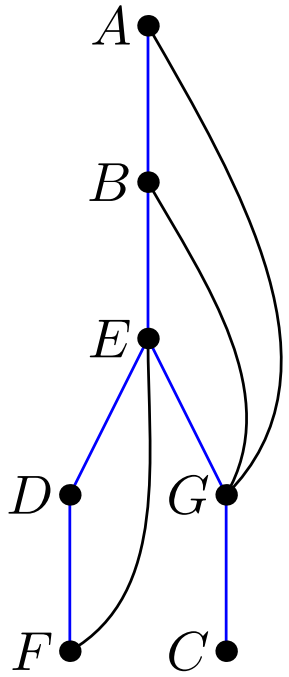
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, G$
C : G
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, C, \underline{E}$



Pile : A, B, E, G

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

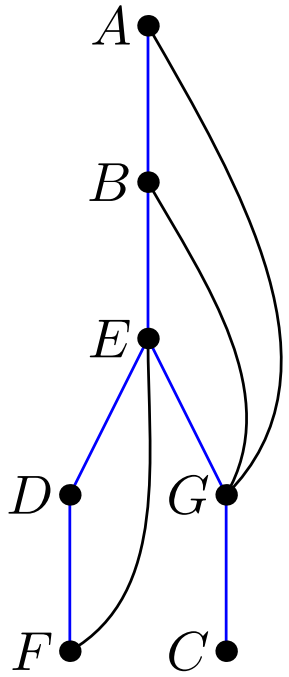
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, G$
C : G
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, E$



Pile : A, B, E, G, C

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

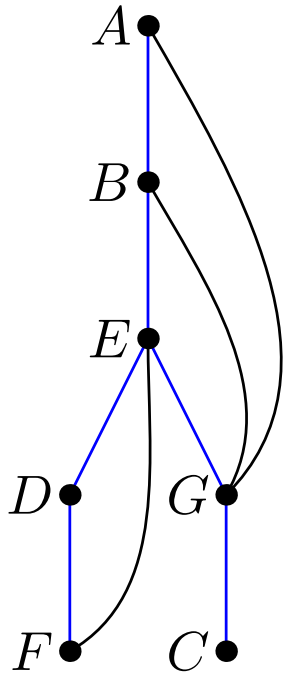
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, G$
C : $\underline{G}$
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, E$



Pile : A, B, E, G, C

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

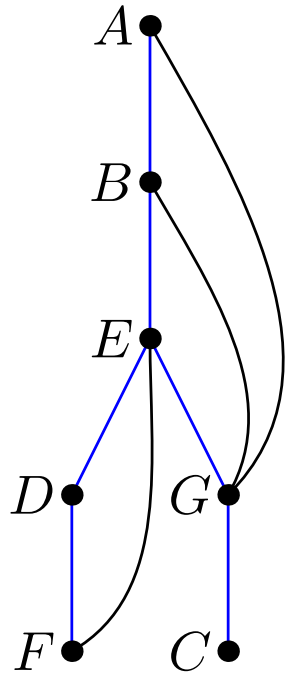
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, G$
C : $\underline{G}$
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, E$



Pile : A, B, E, G

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

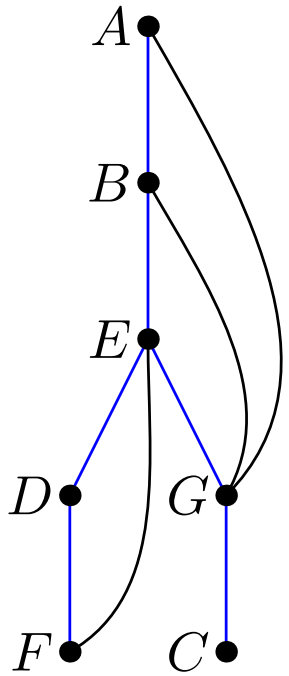
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, G$
C : $\underline{G}$
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{E}$



Pile : A, B, E, G

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

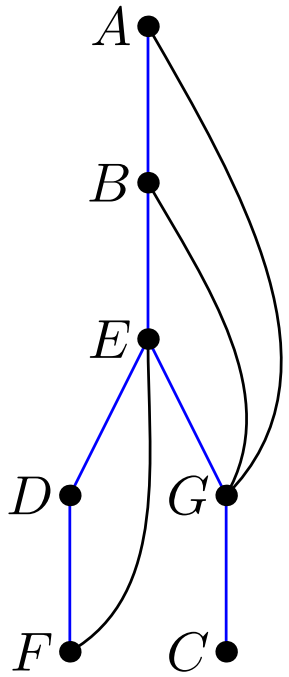
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, G$
C : $\underline{G}$
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{E}$



Pile : A, B, E

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

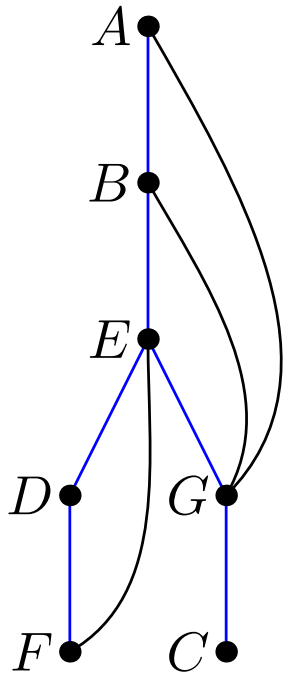
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, G$
C : $\underline{G}$
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{E}$



Pile : A, B

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

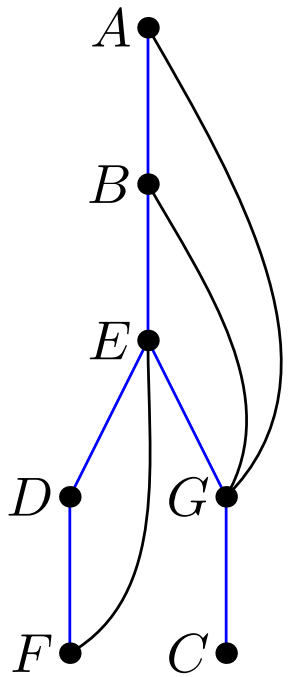
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, \underline{G}$
C : $\underline{G}$
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{E}$



Pile : A, B

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

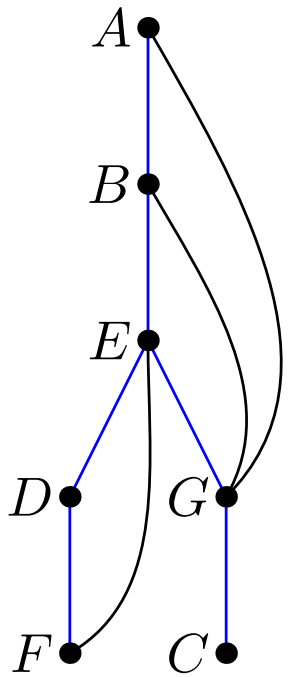
A : $\underline{B}, G$
B : $\underline{A}, \underline{E}, \underline{G}$
C : $\underline{G}$
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{E}$



Pile : A

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

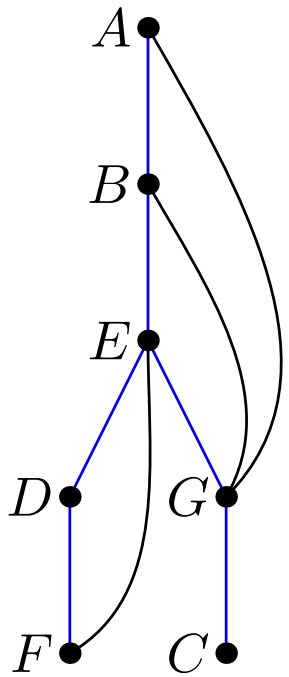
A : B, G
B : A, E, G
C : G
D : E, F
E : B, D, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E



Pile : A

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

A : B, G
B : A, E, G
C : G
D : E, F
E : B, D, F, G
F : D, E
G : A, B, C, E



Pile :

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

- Toute arête qui n'est pas une arête de liaison relie un sommet à un de ses ancêtres – c'est une *arête de retour*
- Chaque arête de retour est découverte deux fois, mais elle ne nous donne pas de nouvelle information sur les sommets du graphe

Parcours en profondeur – graphes non-orientés

- Toute arête qui n'est pas une arête de liaison relie un sommet à un de ses ancêtres – c'est une *arête de retour*
- Chaque arête de retour est découverte deux fois, mais elle ne nous donne pas de nouvelle information sur les sommets du graphe

Exercice : Transformer l'algorithme DFS(G) en une version non-récursive, en explicitant la pile.

Parcours en profondeur : début et fin de visite

Algorithme 3 : DFS(G)

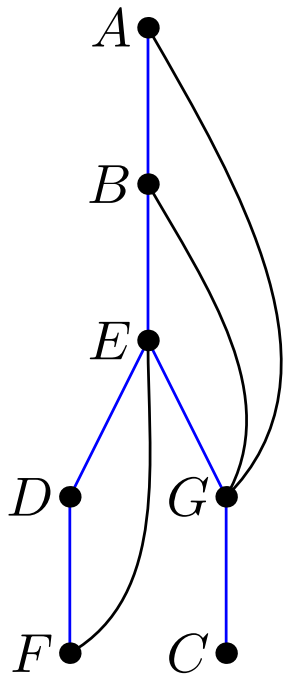
Données : graphe G
début
  pour chaque *s sommet de G*
   faire
    couleur[s] $\leftarrow$ BLANC ;
    $\pi[s] \leftarrow$ NULL ;
  fin
  temps $\leftarrow 0$;
  pour chaque *s sommet de G*
   faire
    si *couleur*[s] $=$ *BLANC*
     alors
      Visiter(s) ;
    fin
  fin
fin

Algorithme 4 : Visiter(u)

début
  couleur[u] $\leftarrow$ GRIS ;
  $d[u] \leftarrow$ temps $\leftarrow$ temps $+ 1$;
  pour chaque *v voisin de u*
   faire
    si *couleur*[v] $=$ *BLANC*
     alors
      $\pi[v] \leftarrow u$;
      Visiter(v) ;
    fin
  fin
  couleur[u] $\leftarrow$ NOIR ;
  $f[u] \leftarrow$ temps $\leftarrow$ temps $+ 1$;
fin

Parcours en profondeur : début et fin de visite

A : $\underline{B}, \underline{G}$
B : $\underline{A}, \underline{E}, \underline{G}$
C : $\underline{G}$
D : $\underline{E}, \underline{F}$
E : $\underline{B}, \underline{D}, \underline{F}, \underline{G}$
F : $\underline{D}, \underline{E}$
G : $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{E}$



Pile :

Parcours en profondeur – graphes orientés

Parcours en profondeur – graphes orientés

Il existe plusieurs types d'arcs :

- *arc de liaison* relie un sommet et son père (dans le sens père $\rightarrow$ fils)

Parcours en profondeur – graphes orientés

Il existe plusieurs types d'arcs :

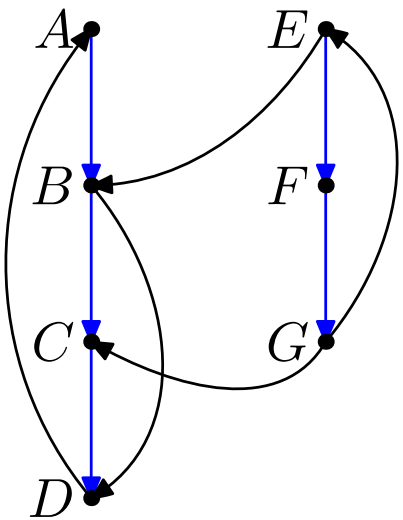
- *arc de liaison* relie un sommet et son père (dans le sens père $\rightarrow$ fils)
- *arc de retour* relie un sommet à son ancêtre (dans le sens descendant $\rightarrow$ ancêtre) – c'est un arc qui permet de remonter dans l'arbre de liaison
- *arc d'avant* relie un sommet à son descendant autre que fils (dans le sens ancêtre $\rightarrow$ descendant) – c'est un arc qui permet de redescendre dans l'arbre de liaison

Parcours en profondeur – graphes orientés

Il existe plusieurs types d'arcs :

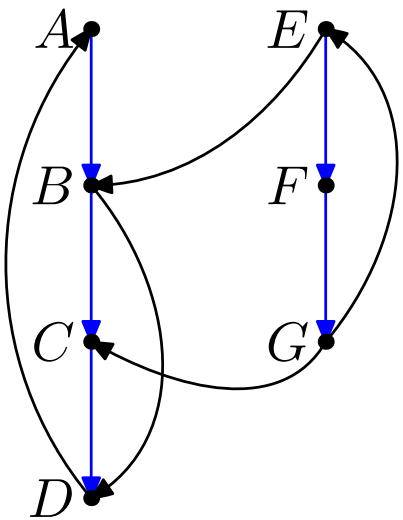
- *arc de liaison* relie un sommet et son père (dans le sens père $\rightarrow$ fils)
- *arc de retour* relie un sommet à son ancêtre (dans le sens descendant $\rightarrow$ ancêtre) – c'est un arc qui permet de remonter dans l'arbre de liaison
- *arc d'avant* relie un sommet à son descendant autre que fils (dans le sens ancêtre $\rightarrow$ descendant) – c'est un arc qui permet de redescendre dans l'arbre de liaison
- *arc transverse* relie un sommet à tout autre sommet dont la visite a bien été déjà terminée

Parcours en profondeur – graphes orientés



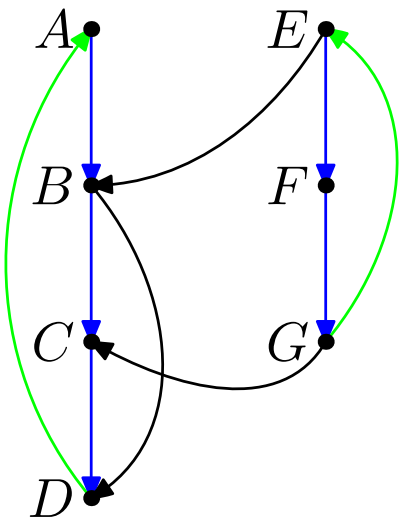
arcs de liaison

Parcours en profondeur – graphes orientés



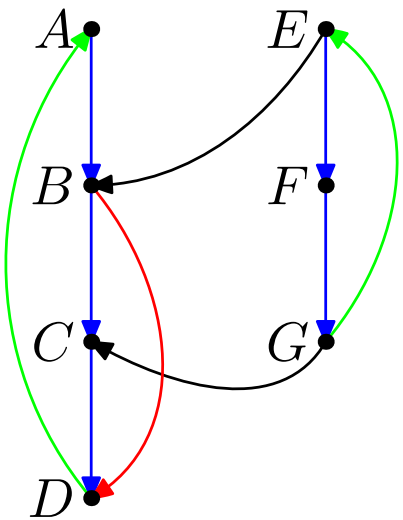
arcs de liaison
arcs de retour
arcs d'avant
arcs transverses

Parcours en profondeur – graphes orientés



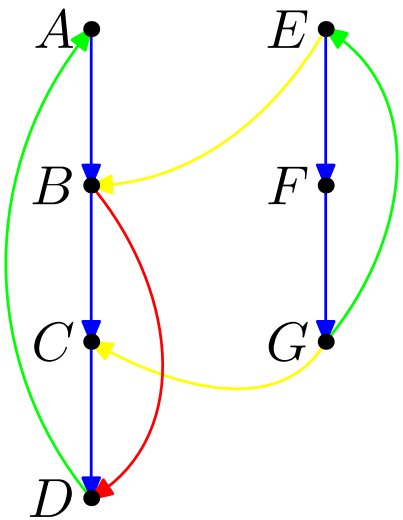
arcs de liaison
arcs de retour
arcs d'avant
arcs transverses

Parcours en profondeur – graphes orientés



arcs de liaison
arcs de retour
arcs d'avant
arcs transverses

Parcours en profondeur – graphes orientés



arcs de liaison
arcs de retour
arcs d'avant
arcs transverses

Parcours en profondeur : Applications

On peut utiliser un parcours en profondeur dans un graphe orienté pour détecter la présence de circuits :

- Dans un graphe orienté, chaque arc de retour témoigne d'un circuit
- Pour chaque circuit, il y a au moins un arc de retour

Parcours en profondeur : Applications

Dans un graphe orienté sans circuit, un parcours en profondeur permet d'établir un *tri topologique* – trouver un ordre linéaire des sommets tel que tout arc suive la même direction (de gauche à droite) :

Parcours en profondeur : Applications

Dans un graphe orienté sans circuit, un parcours en profondeur permet d'établir un *tri topologique* – trouver un ordre linéaire des sommets tel que tout arc suive la même direction (de gauche à droite) : il suffit d'ordonner les sommets par l'ordre décroissant de la fin de visite.