

Algorithmique des graphes

Cours 9 – Encore des flots

František Kardoš

`frantisek.kardos@u-bordeaux.fr`

Au programme

- ▶ Complexité de Ford-Fulkerson
- ▶ Performance de Ford-Fulkerson
- ▶ Applications de Ford-Fulkerson

Complexité de Ford-Fulkerson

Marquage() : $O(m + n)$, comme un parcours en largeur

Améliorer() : $O(m)$, le quasi-chemin augmentant est de longueur au plus m

Ford-Fulkerson : $O(K \cdot (m + n))$ où K est le nombre d'améliorations effectuées avant de trouver un flot maximum

Complexité de Ford-Fulkerson

Comment borner K ?

Complexité de Ford-Fulkerson

Comment borner K ?

À chaque amélioration, un arc au moins devient saturé (ou redevient nul).

Complexité de Ford-Fulkerson

Comment borner K ?

À chaque amélioration, un arc au moins devient saturé (ou redevient nul).

Si le même arc devient saturé à plusieurs reprises, ça ne peut pas être par le même quasi-chemin augmentant. En plus, c'est toujours par un quasi-chemin augmentant de plus en plus long.

Complexité de Ford-Fulkerson

Comment borner K ?

À chaque amélioration, un arc au moins devient saturé (ou redevient nul).

Si le même arc devient saturé à plusieurs reprises, ça ne peut pas être par le même quasi-chemin augmentant. En plus, c'est toujours par un quasi-chemin augmentant de plus en plus long. Tout arc peut devenir saturé au plus m fois, d'où $K \leq m^2$.

Performance de Ford-Fulkerson

Le quasi-chemin trouvé par `Marquage()` n'est pas forcément celui qui permet d'effectuer une amélioration d'un plus grande valeur possible.

Performance de Ford-Fulkerson

Le quasi-chemin trouvé par `Marquage()` n'est pas forcément celui qui permet d'effectuer une amélioration d'un plus grande valeur possible.

Au lieu de juste chercher à joindre t par un quasi-chemin quelconque, on peut chercher à optimiser la valeur d'augmentation par un quasi-chemin, et cela sommet par sommet.

Performance de Ford-Fulkerson

Implémentons Marquage() non pas comme un parcours en largeur, mais comme un calcul de distances (Dijkstra) :

Performance de Ford-Fulkerson

Implémentons Marquage() non pas comme un parcours en largeur, mais comme un calcul de distances (Dijkstra) :

Dijkstra : Pour tout sommet, on veut calculer la **distance**

Ford-Fulkerson : Pour tout sommet, on veut calculer la **valeur d'amélioration**

Performance de Ford-Fulkerson

Implémentons Marquage() non pas comme un parcours en largeur, mais comme un calcul de distances (Dijkstra) :

Dijkstra : La distance : la **somme** des distances arc par arc

Ford-Fulkerson : La valeur d'amélioration : le **minimum** des valeurs d'améliorations arc par arc

Performance de Ford-Fulkerson

Choix de sommet à visiter parmi les sommets découverts mais pas encore visités (enfilés) :

Dijkstra : Le sommet d'une distance **minimum**

Ford-Fulkerson : Le sommet d'une valeur d'amélioration **maximum**

Applications de Ford-Fulkerson

Posons $c(e) = 1$ pour tout arc de G .

Qu'est-ce qu'un flot ?

Applications de Ford-Fulkerson

Posons $c(e) = 1$ pour tout arc de G .

Qu'est-ce qu'un flot ?

Qu'est-ce qu'un flot maximum ?

Applications de Ford-Fulkerson

Posons $c(e) = 1$ pour tout arc de G .

Qu'est-ce qu'un flot ?

Qu'est-ce qu'un flot maximum ?

Qu'est-ce qu'une coupe minimum ?

Applications de Ford-Fulkerson

Posons $c(e) = 1$ pour tout arc de G .

Qu'est-ce qu'un flot ?

Qu'est-ce qu'un flot maximum ?

Qu'est-ce qu'une coupe minimum ?

Theorem (Menger)

Le nombre maximum de s - t -chemins arc-disjoints est égal à la taille minimum d'une s - t -coupe.

Preuve. Cas particulier de Ford-Fulkerson.

Applications de Ford-Fulkerson

Et des chemins sommet-disjoints ?

Applications de Ford-Fulkerson

Et des chemins sommet-disjoints ?

Theorem (Menger)

Le nombre maximum de s - t -chemins sommet-disjoints est égal à la taille minimum d'un s - t -séparateur.

À noter : existe aussi dans une version non-orienté.

Applications de Ford-Fulkerson

Theorem (König)

Soit G un graphe biparti. Alors le cardinal maximum d'un couplage est égal au cardinal minimum d'un transversal.

Un *couplage* est un ensemble d'arêtes disjointes.

Un *transversal* est un ensemble de sommets couvrant toutes les arêtes.

Preuve. Transformer un graphe biparti en un réseau de flot, et appliquer Ford-Fulkerson.