

Cours 1 : Points fixes de fonctions monotones

Anne Dicky – 7 novembre 2009

Table des matières

1 Exemples de points fixes	2
2 Ensembles ordonnés complets et fonctions continues pour l'ordre	4
3 Théorèmes de point fixe dits «de Knaster-Tarski»	5
4 Exercices	7

1 Exemples de points fixes

Limites de suites récurrentes

On peut définir une suite réelle u_n par son premier terme u_0 et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On démontre facilement que si la fonction f est continue et que la suite admet une limite, cette limite est un point fixe de f .

Cette propriété est utilisée pour calculer des valeurs approchées d'un nombre lorsqu'on sait que ce nombre est l'unique point fixe d'une fonction continue.

Par exemple, l'unique point fixe de la fonction f de $[0, +\infty[$ dans lui-même définie par

$$f(x) = \frac{x+5}{x+1}$$

est $\sqrt{5}$. On peut montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente; par conséquent la suite u_n a pour limite $\sqrt{5}$.

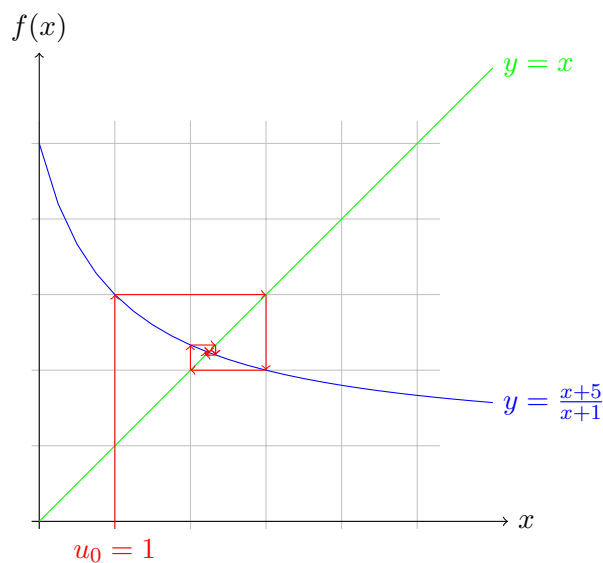


FIG. 1 – $\sqrt{5}$ comme limite de suite récurrente

Remarque: $\sqrt{5}$ est aussi bien l'unique point fixe de la fonction g de $[0, +\infty[$ dans lui-même définie par $g(x) = \frac{5}{x}$. Mais, en général, les suites satisfaisant la relation $u_{n+1} = g(u_n)$ ne convergent pas (les valeurs successives sont $u_0, \frac{5}{u_0}, u_0, \frac{5}{u_0}, \dots$)

Définitions inductives

La définition inductive d'un ensemble E est la donnée d'éléments de base, et d'opérations permettant d'obtenir de nouveaux éléments à partir de ceux que l'on a déjà. Le schéma général est

(base) $B \subseteq E$

(induction) si $X \subseteq E$, alors $C(X) \subseteq E$

où B est l'ensemble des éléments de base, et $C(X)$ désigne l'ensemble des éléments qu'on peut construire à partir des éléments d'un ensemble X . E est par définition l'ensemble des éléments que l'on peut obtenir à partir des éléments de base en appliquant un nombre fini de fois les opérations de construction ; c'est un point fixe de la fonction $f(X) = B \cup C(X)$, et plus précisément le *plus petit* des points fixes de f pour l'inclusion d'ensembles.

Exemples:

1. La grammaire définie par les règles $S \rightarrow b \mid aS$ engendre le langage a^*b , plus petit (et d'ailleurs unique) point fixe de la fonction $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ définie par $f(S) = b \cup aS$.
2. La grammaire définie par $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb$ engendre le langage $\{a^n b^n / n \geq 0\}$, plus petit point fixe de la fonction $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ définie par $f(S) = \{\varepsilon\} \cup aSb$.
3. La relation d'accessibilité dans un graphe peut être définie de façon inductive :

$$s \text{ est accessible depuis } s_0 \iff \begin{cases} s = s_0 \\ \text{ou} \\ s \text{ est le successeur d'un sommet accessible depuis } s_0 \end{cases}$$

ce qui revient à définir l'ensemble $Accessibles(s_0)$ comme le plus petit point fixe de la fonction $f(X) = \{s_0\} \cup Successeurs(X)$.

2 Ensembles ordonnés complets et fonctions continues pour l'ordre

Définitions. Un ensemble ordonné E est dit **sup-complet** s'il admet un plus petit élément (habituellement noté \perp , bottom) et que toute partie non vide de E admet une borne supérieure.

Symétriquement, E est dit **inf-complet** s'il admet un plus grand élément (habituellement noté \top , top) et que toute partie non vide de E admet une borne inférieure.

Un ensemble ordonné est dit **complet** s'il est à la fois sup-complet et inf-complet.

Exemples et contre-exemples:

1. L'intervalle réel $[0, 1]$ est complet pour l'ordre usuel.
2. \mathbb{N} n'est pas sup-complet pour l'ordre usuel (pas de plus grand élément).
3. \mathbb{N} est complet pour la relation d'ordre «divise» (le plus petit élément est 1, le plus grand élément est 0, la borne inférieure d'une partie non vide X de \mathbb{N} est le plus grand diviseur commun à tous les éléments de X ; la borne supérieure de X est le plus grand multiple commun à tous les éléments de X si X est fini, et 0 si X est infini).
4. L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de n'importe quel ensemble X , ordonné par inclusion, est complet (la borne supérieure d'un ensemble non vide de parties de X est la réunion de ces parties, la borne inférieure est leur intersection).

Définition. On dit qu'une fonction f d'un ensemble ordonné complet E dans un ensemble ordonné complet F est **continue à gauche** (pour l'ordre) si elle préserve les bornes supérieures, c'est-à-dire si pour toute partie non vide X de E

$$\text{Sup}\{f(x) / x \in X\} = f(\text{Sup } X)$$

On définit de même les fonctions **continues à droite** des ensembles ordonnés complets comme celles qui préservent les bornes inférieures.

Remarques:

1. Une fonction continue (à gauche ou à droite) est nécessairement croissante : en effet, supposons f continue à gauche : si $x \leq y$

$$\text{Sup}\{f(x), f(y)\} = f(\text{Sup}\{x, y\}) = f(y)$$

et par conséquent $f(x) \leq f(y)$.

2. Mais une fonction croissante n'est pas nécessairement continue : par exemple, la fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}x$ si $x < \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{3}{4}x$ si $x \geq \frac{1}{2}$ n'est pas continue à gauche, puisque $\text{Sup } f([0, \frac{1}{2}[) = \frac{1}{8}$ diffère de $f(\text{Sup}[0, \frac{1}{2}[) = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$. (Remarque : les fonctions de $[0, 1]$ dans lui-même continues pour l'ordre sont les fonctions croissantes qui sont continues au sens usuel du terme.)

3 Théorèmes de point fixe dits «de Knaster-Tarski»

Ces théorèmes (dont on trouve de nombreuses versions dans la littérature) traitent d'une part de l'*existence* de points fixes de fonctions dans des ensembles ordonnés (qui permettent la définition formelle de certaines notions), d'autre part du *calcul* de ces points fixes (par des algorithmes) : soit le calcul exact (quand on peut déterminer le point fixe en un nombre fini d'étapes), soit un calcul approché (limite de suite infinie).

Théorème de Knaster-Tarski 1 (existence).

Toute application croissante f d'un ensemble ordonné complet E dans lui-même admet un plus petit point fixe, qui est le plus petit élément x de E tel que $f(x) \leq x$; et un plus grand point fixe, qui est le plus grand élément x de E tel que $x \leq f(x)$.

Démonstration. L'ensemble $I = \{x \in E / f(x) \leq x\}$ n'est pas vide (il contient \top), il admet donc une borne inférieure a .

Pour tout x de I on a $a \leq x$, donc $f(a) \leq f(x)$ (puisque f est croissante), donc $f(a) \leq x$ (puisque $f(x) \leq x$). Par conséquent $f(a)$ est un minorant de I , et comme a est le plus grand minorant de I , $f(a) \leq a$: en d'autres termes, $a \in I$, et comme a minore I , a est le plus petit élément de I .

De $f(a) \leq a$ on déduit $f(f(a)) \leq f(a)$ et par conséquent $f(a) \in I$. Donc $a \leq f(a)$ puisque a est le plus petit élément de I , et en définitive $f(a) = a$: a est un point fixe de f , et comme tout point fixe de f est élément de I , a est bien le plus petit point fixe de f .

(Démonstration analogue pour le plus grand point fixe.) □

Exemple:

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Pour toute partie X de V , on note $Pred(X)$ l'ensemble des prédécesseurs des sommets de X :

$$Pred(X) = \{s \in V / \exists s' \in X, s \rightarrow s' \in E\}$$

Soit X_0 une partie de V . La fonction $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ définie par $f(X) = X_0 \cup Pred(X)$ est évidemment croissante pour l'inclusion : elle admet donc un plus petit et un plus grand point fixe.

Le plus petit point fixe de f est l'ensemble Y des sommets depuis lesquels on peut atteindre un sommet de X_0 (définition inductive de la co-accessibilité : Y est le plus petit ensemble contenant X_0 et tel que $Pred(Y) \subseteq Y$).

Le plus grand point fixe de f est l'ensemble $Z = Y \cup I$ où I est l'ensemble des sommets depuis lesquels il existe dans le graphe un chemin infini : en effet

- $I \subseteq Pred(I)$ (évident) et $Y = f(Y)$, donc $Z = Y \cup I \subseteq f(Y) \cup f(I)$, d'où $Z \subseteq f(Z)$
- soit X une partie de V telle que $X \subseteq f(X)$, et soit s un sommet de X . Si $s \in Y$, a fortiori $s \in Z$. Sinon, de $s \in f(X)$ et $s \notin Y$ on déduit que s a dans X un successeur $s_1 \notin Y$; par récurrence, on peut construire un chemin infini $s = s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \dots$; on a ainsi $s \in I$, donc là encore $s \in Z$.

Z est donc bien le plus grand ensemble X tel que $X \subseteq f(X)$.

Théorème de Knaster-Tarski 2 (calcul comme limite de suite monotone).

Si f est une application continue à gauche d'un ensemble ordonné complet E dans lui-même, son plus petit point fixe est la borne supérieure de la suite x_n définie par $x_0 = \perp$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

De même, si f est continue à droite, son plus grand point fixe est la borne inférieure de la suite $f^n(\top)$.

Démonstration. L'ensemble $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ des éléments de la suite $x_n = f^n(\perp)$ admet une borne supérieure, et comme f est continue à gauche, $\text{Sup } f(X) = f(\text{Sup } X)$.

Mais l'ensemble $f(X) = \{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), \dots\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \dots\}$ est l'ensemble des éléments de X , sauf peut-être $x_0 = \perp$: il a donc même borne supérieure que X , et par conséquent $\text{Sup } X = f(\text{Sup } X)$; $\text{Sup } X$ est ainsi un point fixe de f .

Soit a un point fixe de f . Pour tout entier n , $x_n \leq a$: en effet, $x_0 = \perp \leq a$ et si $x_n \leq a$, $x_{n+1} = f(x_n) \leq f(a) = a$. Donc a est un majorant de X , et par suite $\text{Sup } X \leq a$.

En définitive, $\text{Sup } X$ est le plus petit point fixe de f .

(Démonstration analogue pour les plus grands points fixes.) □

Remarque. Il suffit que f soit croissante pour que la suite $x_n = f^n(\perp)$ soit croissante : en effet, $x_0 = \perp \leq x_1$ et pour tout $n > 0$, si $x_{n-1} \leq x_n$, alors $f(x_{n-1}) \leq f(x_n)$ (puisque f est croissante), c'est-à-dire $x_n \leq x_{n+1}$. De même, si f est croissante, la suite $f^n(\top)$ est décroissante.

Théorème de Knaster-Tarski 3 (calcul effectif).

Soit f une application croissante d'un ensemble ordonné E dans lui-même : si E admet un plus petit élément \perp et si la suite croissante $f^n(\perp)$ est constante à partir d'un certain rang, sa valeur limite est le plus petit point fixe de f .

De même, si E admet un plus grand élément \top et si la suite décroissante $f^n(\top)$ est stationnaire, sa valeur limite est le plus grand point fixe de f .

Démonstration. Si la suite $x_n = f^n(\perp)$ est constante à partir du rang k , $x_k = x_{k+1} = f(x_k)$ et par conséquent x_k est un point fixe de f .

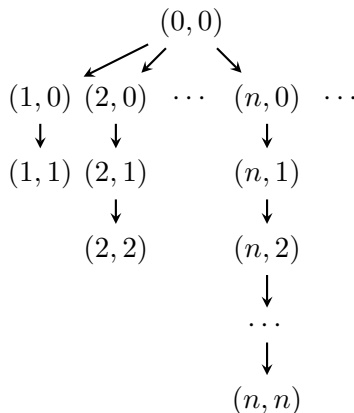
Soit a un point fixe de f . Pour tout entier n , $x_n \leq a$: en effet, $x_0 = \perp \leq a$ et si $x_n \leq a$, $x_{n+1} = f(x_n) \leq f(a) = a$. En particulier, $x_k \leq a$: x_k est donc bien le plus petit point fixe de f .

(Démonstration analogue pour les plus grands points fixes.) □

Remarque. Le calcul des plus petit et plus grand points fixes comme limites de suites monotones est toujours effectif si E est fini : en effet, dans un ensemble fini, toute suite monotone est stationnaire.

4 Exercices

Exercice 1. Soit (V, E) l'arbre infini dont les sommets sont les couples d'entiers (n, p) tels que $n \geq p \geq 0$ et les arcs, tous les $(0, 0) \rightarrow (n, 0)$ (pour $n > 0$) et tous les $(n, p) \rightarrow (n, p + 1)$ (pour $n > p \geq 0$) :



1. Déterminer le plus grand point fixe de la fonction Pred .
2. Déterminer la limite de la suite $\text{Pred}^n(V)$. Qu'en conclure ?

Exercice 2. Montrer que la composante fortement connexe d'un sommet donné s_0 est un point fixe de la fonction $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ définie par

$$f(X) = \{s_0\} \cup (\text{Succ}(X) \cap \text{Pred}(X))$$

Est-ce toujours le plus petit ? ou le plus grand ?

Exercice 3. La plupart des jeux de patience (réussites, jeux de Solitaire...) peuvent être modélisés par des graphes orientés dont les sommets représentent les configurations possibles du jeu, et les arcs représentent les coups possibles du joueur, les configurations gagnantes constituant un ensemble G de sommets. Une partie correspond à un chemin (fini ou infini) dans le graphe : si le chemin atteint un sommet de G , la partie est gagnée.

Une position gagnante, pour le joueur, est une configuration depuis laquelle il existe une possibilité de gagner.

1. Exprimer comme un plus petit point fixe l'ensemble des positions gagnantes.
2. Montrer que, dans le cas où toute partie est finie (graphe sans cycle), l'ensemble des positions gagnantes peut s'exprimer comme un plus grand point fixe.

Exercice 4. Soient f et g des fonctions croissantes d'un ensemble ordonné complet E dans lui-même. On suppose que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$. Montrer que le plus petit point fixe de f est inférieur ou égal au plus petit point fixe de g . A-t-on un résultat analogue pour les plus grands points fixes ?