

Cours 2 : Le μ -calcul modal

Anne Dicky – 9 novembre 2009

Table des matières

1	Points fixes d'ordre supérieur	2
2	Syntaxe et sémantique du μ -calcul modal	3
3	Algorithmes d'évaluation	5
4	Exercices	6

1 Points fixes d'ordre supérieur

Soit E un ensemble ordonné complet, f une application de $E \times E$ dans E (fonction de deux variables). On suppose que f est croissante par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \forall x \in E & y \leq y' \Rightarrow f(x, y) \leq f(x, y') \\ \forall y \in E & x \leq x' \Rightarrow f(x, y) \leq f(x', y) \end{cases}$$

Pour tout $x \in E$, l'application $f_x : y \rightarrow f(x, y)$ est croissante. D'après le premier théorème de Knaster-Tarski, elle admet donc un plus petit point fixe

$$\varphi(x) = \text{Inf}\{y / f(x, y) \leq y\}$$

Si $x \leq x'$, alors $f(x, \varphi(x')) \leq f(x', \varphi(x'))$ et par conséquent $\varphi(x')$ est un élément de l'ensemble $\{y / f(x, y) \leq y\}$. Donc $\varphi(x) \leq \varphi(x')$: la fonction φ est elle-même croissante.

De même, la fonction qui à x associe le plus grand point fixe de f_x est une fonction croissante de E dans E .

Plus généralement, si $f : E^p \rightarrow E$ est une fonction croissante de p variables, les fonctions qui à $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ associent le plus petit et le plus grand point fixe de

$$f_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})} : y \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, y)$$

sont des fonctions croissantes de $p - 1$ variables.

On peut ainsi définir des points fixes d'ordre supérieur (points fixes de points fixes).

Exemple:

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, X_0 une partie de V .

Pour toute partie X de V , l'ensemble $\varphi(X)$ des sommets depuis lesquels on peut atteindre un prédécesseur d'un sommet de $X_0 \cap X$ est le plus petit point fixe de la fonction

$$Y \rightarrow f(X, Y) = \text{Pred}(X_0 \cap X) \cup \text{Pred}(Y)$$

φ est une fonction croissante, dont le plus grand point fixe est l'ensemble I des sommets depuis lesquels il existe un chemin passant une infinité de fois par un sommet de X_0 .

Démonstration.

- $I \subseteq \varphi(I)$: en effet, si $s \in I$, il existe depuis s un chemin infini $s = s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_n \rightarrow \dots$ tel que $s_n \in X_0$ pour une infinité d'indices n , en particulier pour un certain $k > 0$; s_k est lui-même dans I , donc $s_{k-1} \in \text{Pred}(X_0 \cap I)$ et par conséquent $s \in \varphi(I)$.
- Soit X un ensemble tel que $X \subseteq \varphi(X)$: pour tout $s \in X$, on a $s \in \varphi(X)$, donc il existe depuis s un chemin $s \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_1$ avec $x_1 \in X_0 \cap X$. Comme $x_1 \in X$, il existe depuis x_1 un chemin $x_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_2$ avec $x_2 \in X_0 \cap X$, etc. Par récurrence, on peut construire un chemin infini $s \rightarrow \dots \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow \dots$ où tous les sommets x_n sont dans X_0 , donc $s \in I$.

I est donc le plus grand ensemble tel que $I \subseteq \varphi(I)$, et par conséquent (premier théorème de Knaster-Tarski) le plus grand point fixe de φ . \square

2 Syntaxe et sémantique du μ -calcul modal

Les μ -calculs **propositionnels** sont des logiques propositionnelles dont les formules peuvent comporter des variables quantifiées par des opérateurs de point fixe : les formules s'interprètent comme des fonctions, et les formules où apparaissent des variables quantifiées, comme de plus petits (ou de plus grands) points fixes de fonctions.

Syntaxe du μ -calcul modal

On se donne un alphabet de **variables** $X, Y \dots$ et un ensemble de **formules atomiques** $p, q \dots$. Les formules du μ -calcul modal, ou μ -termes, sont engendrés par la grammaire

$$t := \top \mid \perp \mid p \mid X \mid t \vee t \mid t \wedge t \mid \neg t \mid \diamond t \mid \square t \mid \mu X.t \mid \nu X.t$$

avec deux restrictions syntaxiques pour les termes de la forme $\mu X.t$ ou $\nu X.t$:

- la variable X ne peut apparaître dans t que comme une variable libre (non quantifiée par un opérateur μ ou ν)
- la variable X ne peut apparaître dans t que sous un nombre *pair* de \neg (restriction dite de **monotonie syntaxique**).

Un μ -terme est dit **clos** s'il ne comporte aucune variable libre.

Sémantique

Les modèles du μ -calcul modal sont des structures à la Kripke, c'est-à-dire des graphes orientés (V, E) dont les sommets sont étiquetés par des ensembles de formules atomiques.

Chaque μ -terme t dont les variables libres sont éléments d'un ensemble $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ peut s'interpréter comme une fonction $|t|$ de $(\mathcal{P}(V))^n$ dans $\mathcal{P}(V)$:

- les termes sans variables libres s'interprètent comme des fonctions constantes : $|\top| = V$, $|\perp| = \emptyset$, et si p est une formule atomique, $|p|$ est l'ensemble des sommets étiquetés p
- X_i s'interprète comme la projection $(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow X_i$
- $|t_1 \vee t_2| = |t_1| \cup |t_2|$, $|t_1 \wedge t_2| = |t_1| \cap |t_2|$, $|\neg t| = \overline{|t|}$, $|t_1 \Rightarrow t_2| = \overline{|t_1|} \cup |t_2|$
- $|\diamond t|(X_1, \dots, X_n) = \text{Pred}(|t|(X_1, \dots, X_n))$ et $|\square t|(X_1, \dots, X_n) = \overline{\text{Pred}(|t|(X_1, \dots, X_n))}$ où $\text{Pred}(X) = \overline{\text{Pred}(\overline{X})}$ (ensemble des sommets dont tous les successeurs sont dans X)
- $|\mu X.t|(X_1, \dots, X_n)$ est le plus petit point fixe de la fonction $X \rightarrow |t|(X, X_1, \dots, X_n)$, $|\nu X.t|(X_1, \dots, X_n)$ son plus grand point fixe.

Exemples

le μ -terme	s'interprète comme l'ensemble des sommets depuis lesquels
$\mu X.p \vee \diamond X$	il est possible d'atteindre un sommet de $ p $
$\nu X.p \vee \diamond X$	il existe un chemin infini, ou il est possible d'atteindre un sommet de $ p $
$\nu X.\diamond X$	il existe un chemin infini
$\nu X.p \wedge \diamond X$	il existe un chemin infini dont tous les sommets sont dans $ p $
$\nu X.\mu Y.\diamond(p \wedge X) \vee \diamond Y$	il existe un chemin passant par une infinité de sommets de $ p $

Équivalence sémantique et dualité

On notera $t_1 \equiv t_2$ l'équivalence sémantique des μ -termes t_1 et t_2 , c'est-à-dire le fait que t_1 et t_2 s'interprètent de la même façon dans tous les modèles.

On a en particulier toutes les équivalences sémantiques correspondant aux lois de De Morgan (calcul booléen) : $\neg\neg t \equiv t$, $\neg\top \equiv \perp$, $t \vee (t_1 \wedge t_2) \equiv (t \wedge t_1) \vee (t \wedge t_2)$, etc. et notamment la dualité des opérateurs \vee et \wedge : $\neg(t_1 \wedge t_2) \equiv \neg t_1 \vee \neg t_2$ et $\neg(t_1 \vee t_2) \equiv \neg t_1 \wedge \neg t_2$.

D'autres équivalences sémantiques font intervenir les opérateurs modaux \diamond et \square :

- dualité : $\neg\diamond X \equiv \square\neg X$ et $\neg\square X \equiv \diamond\neg X$
- $\diamond(t_1 \vee t_2) \equiv \diamond t_1 \vee \diamond t_2$, et par dualité $\square(t_1 \wedge t_2) \equiv \square t_1 \wedge \square t_2$
- de façon évidente : $\diamond\perp \equiv \perp$, d'où en particulier $\mu X.\diamond X \equiv \perp$; et par dualité $\square\top \equiv \top$ et $\nu X.\square X \equiv \top$.

Pour mettre en évidence la dualité des opérateurs de point fixe μ et ν , on étend la notion de dualité aux termes comportant des variables libres, au sens suivant : si la variable X apparaît librement dans un μ -terme t , le **dual de t par rapport à X** est le μ -terme \tilde{t} obtenu en remplaçant X par $\neg X$ dans $\neg t$; clairement, $\tilde{\tilde{t}} \equiv t$.

Proposition 2.1. $\neg\nu X.t \equiv \mu X.\tilde{t}$ et $\neg\mu X.t \equiv \nu X.\tilde{t}$.

Démonstration. Supposons d'abord qu'aucune autre variable que X n'apparaît librement dans t . D'après le premier théorème de Knaster-Tarski, $\nu X.t$ s'interprète comme l'union des ensembles X tels que $X \subseteq |t|$: on a donc

$$|\neg\nu X.t| = \overline{\bigcup\{X / X \subseteq |t|\}} = \bigcap\{\bar{X} / X \subseteq |t|\} = \bigcap\{\bar{X} / |\bar{t}| \subseteq \bar{X}\} = |\mu X.\tilde{t}|$$

L'équivalence $\neg\nu X.t \equiv \mu X.\tilde{t}$ s'applique encore au cas où t comporte des variables libres Y_1, \dots, Y_n autres que X , puisque pour toute valeur des variables libres, $|\tilde{t}|(X, Y_1, \dots, Y_n) = |\tilde{t}|(\bar{X}, Y_1, \dots, Y_n)$. Par dualité, on a aussi $\neg\mu X.t \equiv \nu X.\tilde{t}$. \square

Des relations de dualité et des lois de De Morgan, il résulte que tout μ -terme clos est équivalent à un μ -terme dans lequel les opérateurs \neg n'apparaissent que dans des sous-termes $\neg p$, où p est une formule atomique : on dira qu'un tel μ -terme est en forme normale.

Si t est un μ -terme en forme normale, on obtient une forme normale équivalente à $\neg t$ en remplaçant dans t chaque symbole \vee , \wedge , \diamond , \square , μ et ν par le symbole dual.

Exemples

le μ -terme	s'interprète comme l'ensemble des sommets depuis lesquels
$\nu X.p \wedge \square X$	il n'est possible d'atteindre que des sommets de $ p $
$\mu X.p \wedge \square X$	en avançant on arrivera nécessairement à un sommet de $ p $
$\mu X.\square X$	il n'existe aucun chemin infini
$\mu X.p \vee \square X$	tout chemin infini passe par un sommet de $ p $
$\mu X.\nu Y.\square(p \vee X) \wedge \square Y$	sur tout chemin infini, à partir d'un certain rang tous les sommets sont dans $ p $

3 Algorithmes d'évaluation

L'évaluation d'un μ -terme clos t , dans un graphe fini donné, consiste à marquer les sommets de $|t|$.

Si t ne comporte aucun opérateur de point fixe, l'évaluation peut se faire en temps $O(f \times g)$, où f désigne la taille du terme, et g la taille du graphe (somme du nombre de sommets et du nombre d'arcs) : c'est évident pour les formules atomiques, les sommets étant déjà étiquetés ; évaluer $\diamond t$ revient à parcourir le graphe en marquant les sommets dont un successeur est marqué t , etc.

L'algorithme naïf d'évaluation de $\mu X.t$ consiste à marquer successivement $|t|(\emptyset), \dots, |t|^n(\emptyset)$ jusqu'à ce qu'on atteigne le point fixe (aucun nouveau sommet marqué). Comme à chaque étape (sauf la dernière) on aura marqué au moins un sommet, n sera au plus égal à $s + 1$, où s est le nombre de sommets du graphe ; si $|t|$ se calcule en temps T , l'évaluation de $\mu X.t$ peut donc se faire en temps $O(s \times T)$.

On peut ainsi grossièrement borner la complexité du calcul par $O((f \times s \times g)^{n+1})$, où f est la taille du terme, s le nombre de sommets, g la taille du graphe, et n le nombre maximal de points fixes imbriqués (c'est-à-dire le nombre maximal d'opérateurs μ ou ν sous lesquels peut apparaître une variable).

Cependant, un μ -terme de la forme $t = \mu X.g(X, \mu Y.f(X, Y))$ peut s'évaluer en une seule boucle, en calculant deux ensembles X et Y initialement vides : on répète

$$\begin{aligned} X &:= g(X, Y) \\ Y &:= f(X, Y) \end{aligned}$$

tant qu'on ajoute des sommets à l'un au moins des ensembles X et Y (au plus $2s + 1$ passages dans la boucle).

Notons $\varphi(X)$ le plus petit point fixe de la fonction $Y \rightarrow f(X, Y)$: $|t|$ est alors le plus petit point fixe de la fonction $X \rightarrow g(X, \varphi(X))$.

Les inclusions $X \subseteq |t|$ et $Y \subseteq \varphi(|t|)$, évidemment vraies à l'initialisation, sont un invariant de l'algorithme : en effet

- si $X \subseteq |t|$, alors $\varphi(X) \subseteq \varphi(|t|)$, et si de plus $Y \subseteq \varphi(|t|)$, alors $g(X, Y) \subseteq g(|t|, \varphi(|t|)) = |t|$
- si $X \subseteq |t|$ et $Y \subseteq \varphi(|t|)$, alors $f(X, Y) \subseteq f(|t|, \varphi(|t|)) = \varphi(|t|)$

Quand l'algorithme termine, $Y = f(X, Y)$ est un point fixe de la fonction $Y \rightarrow f(X, Y)$, donc $\varphi(X) \subseteq Y$; par conséquent $g(X, \varphi(X)) \subseteq g(X, Y) = X$, donc (d'après le premier théorème de Knaster-Tarski) le plus petit point fixe de la fonction $X \rightarrow g(X, \varphi(X))$, c'est-à-dire $|t|$, est inclus dans X .

En définitive, X est bien égal à $|t|$.

La méthode se généralise à toute imbrication de points fixes de même nature (plus petits ou plus grands) : l'algorithme naïf permet ainsi de calculer un μ -terme sans opérateur ν (ou sans opérateur μ) en temps $O(f \times s \times g)^1$.

Dans le cas général, le paramètre significatif de la complexité n'est donc pas tant le nombre de points fixes imbriqués que le nombre d'*alternances* de plus petits et de plus grands points fixes imbriqués².

¹Des techniques moins primaires permettent d'obtenir un calcul en temps $O(f \times g)$.

²Les meilleurs algorithmes connus s'exécutent en temps $O(g \times (s \times \frac{f}{g})^{\frac{d}{2}})$, où d est le nombre maximal d'alternances.

4 Exercices

Exercice 1. Donner une interprétation des termes suivants du μ -calcul modal :

1. $\mu X.p \vee (q \wedge \Diamond X)$
2. $\mu X.p \vee \Diamond \Diamond X$
3. $\mu Y.(\nu X.p \wedge \Diamond X) \vee \Diamond Y$

Exercice 2. On considère des graphes orientés dont les sommets peuvent être étiquetés p ou q . Exprimer chacune des propriétés suivantes par un terme du μ -calcul modal :

1. tout chemin infini passe infiniment souvent par un sommet satisfaisant p ;
2. sur tout chemin, entre deux sommets satisfaisant p , il existe au moins un sommet de q ;
3. sur tout chemin, entre deux sommets de p , il y a un nombre pair de sommets intermédiaires.

Exercice 3. On considère des jeux sur un graphe fini dont chaque sommet est étiqueté soit a (positions d'Adam), soit e (positions d'Ève). Une partie est un chemin maximal du graphe (c'est-à-dire soit un chemin infini, soit un chemin aboutissant à un sommet sans successeur). Définir une règle du jeu, c'est donner l'ensemble des chemins maximaux qui correspondent aux parties gagnées par Ève, les autres étant gagnées par Adam (il n'y a pas de parties nulles).

1. On suppose que les parties gagnées par Ève sont toutes les parties qui durent indéfiniment. Montrer que l'ensemble des positions depuis lesquelles Ève a une stratégie gagnante est l'ensemble représenté par le μ -terme

$$\nu X.(e \wedge \Diamond X) \vee (a \wedge \Box X)$$

Exprimer par un μ -terme l'ensemble des positions depuis lesquelles Ève a une stratégie gagnante dans chacun des cas suivants :

2. Ève gagne la partie si c'est au tour d'Adam de jouer, et qu'Adam est bloqué (sommet sans successeur) ; si Ève est bloquée à son tour de jouer, ou si la partie dure indéfiniment, c'est Adam qui gagne.
3. Certains sommets sont étiquetés g ; Ève gagne si Adam est bloqué alors que c'est à son tour de jouer, ou si la partie atteint un sommet étiqueté g .
4. Certains sommets sont étiquetés g ; Ève gagne si Adam est bloqué alors que c'est à son tour de jouer, ou si la partie est infinie et qu'à partir d'un certain moment tous les sommets sont étiquetés g .
5. Certains sommets sont étiquetés g ; Ève gagne si Adam est bloqué alors que c'est à son tour de jouer, ou si la partie passe infiniment souvent par un sommet étiqueté g .