

Cours 3 : μ -calcul et jeux de parité

Anne Dicky – 20 novembre 2009

Table des matières

1	Rappels sur les jeux de parité	2
2	Stratégies positionnelles et points fixes	2
3	μ -termes associés aux positions gagnantes	3

1 Rappels sur les jeux de parité

Un **jeu de parité** à deux joueurs J_0 et J_1 est défini par un graphe orienté fini (V, E) , une partition (V_0, V_1) de V en positions de J_0 et positions de J_1 , et une coloration finie des sommets.

Le jeu consiste à se déplacer dans le graphe à partir d'une position initiale s_0 : à chaque coup, le joueur auquel appartient la position choisit un successeur. Si un joueur est bloqué dans une position sans successeur, son adversaire est déclaré gagnant. Sinon, la partie dure indéfiniment : dans la suite des couleurs des sommets du chemin correspondant, certaines apparaissent infiniment souvent ; la partie est gagnée par J_0 si la plus grande de ces couleurs est paire, et gagnée par J_1 dans le cas contraire.

Une **stratégie positionnelle**, pour un joueur J_i , est une fonction partielle $\sigma : V_i \rightarrow V$ qui à un sommet $v \in V_i$ associe un successeur $\sigma(v)$ de v (le coup que joue J_i dans la position v). La stratégie est **gagnante** pour J_i si toute partie jouée suivant cette stratégie est gagnée par J_i . Étant donné un sommet v , on dit que J_i admet une stratégie positionnelle gagnante **depuis** v s'il existe une stratégie positionnelle σ gagnante pour J_i telle que $\sigma(v)$ est défini.

2 Stratégies positionnelles et points fixes

On note G_0 l'ensemble des sommets depuis lesquels le joueur J_0 a une stratégie positionnelle gagnante.

Soit $v \in G_0$, et soit σ une stratégie gagnante pour J_0 depuis le sommet v :

- si $v \in V_0$, la stratégie σ est également gagnante depuis $\sigma(v)$, qui est un successeur de v ;
- sinon, $v \in V_1$, et la stratégie σ est également gagnante depuis tout successeur de v .

Par conséquent, $G_0 \subseteq (V_0 \cap \text{Pred}(G_0)) \cup (V_1 \cap \widetilde{\text{Pred}}(G_0))$.

Réciproquement, soit $v \in (V_0 \cap \text{Pred}(G_0)) \cup (V_1 \cap \widetilde{\text{Pred}}(G_0))$:

- si $v \in V_0$, v admet un successeur $v' \in G_0$ depuis lequel V_0 admet une stratégie gagnante σ : alors la stratégie σ' définie par $\sigma'(v) = v'$ et $\sigma'(w) = \sigma(w)$ si $w \neq v$ est gagnante pour J_0 ;
- si $v \in V_1$, soient v'_1, v'_2, \dots, v'_k les successeurs de v . Depuis chacun des v'_i , J_0 admet une stratégie gagnante σ_i . On peut combiner ces stratégies en posant $\sigma'_1 = \sigma_1$ et, pour $1 \leq i < k$:

$$\sigma'_{i+1}(w) = \begin{cases} \sigma'_i(w) & \text{si } \sigma'_i(w) \text{ est défini} \\ \sigma_{i+1}(w) & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction, σ'_k est une stratégie gagnante.

Dans tous les cas, J_0 admet une stratégie gagnante depuis v .

En définitive, $G_0 = (V_0 \cap \text{Pred}(G_0)) \cup (V_1 \cap \widetilde{\text{Pred}}(G_0))$: G_0 est donc un point fixe de la fonction $X \rightarrow (V_0 \cap \text{Pred}(X)) \cup (V_1 \cap \widetilde{\text{Pred}}(X))$.

3 μ -termes associés aux positions gagnantes

On utilisera les μ -termes atomiques p_0 et c_i , pour $i \geq 0$; on pose $p_1 = \neg p_0$. Dans un jeu de parité, p_0 et p_1 s'interprètent respectivement comme V_0 et V_1 , c_i comme l'ensemble des sommets de couleur i .

On pose

$$\begin{aligned} t_0(X) &= (p_0 \wedge \diamond X) \vee (p_1 \wedge \square X) \\ t_1(X) &= (p_1 \wedge \diamond X) \vee (p_0 \wedge \square X) \end{aligned}$$

Les μ -termes $t_0(X)$ et $t_1(X)$ sont duaux : en effet

$$\begin{aligned} \widetilde{t_0(X)} &= (p_1 \vee \square X) \wedge (p_0 \vee \diamond X) \\ &\equiv (p_1 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge \diamond X) \vee (p_0 \wedge \square X) \vee (\diamond X \wedge \square X) \end{aligned}$$

or $p_1 \wedge p_0 \equiv \perp$, et l'interprétation de $\diamond X \wedge \square X \equiv (\diamond X \wedge \square X \wedge p_1) \vee (\diamond X \wedge \square X \wedge p_0)$ est toujours incluse dans celle de $(p_1 \wedge \diamond X) \vee (p_0 \wedge \square X)$, donc

$$\widetilde{t_0(X)} \equiv (p_1 \wedge \diamond X) \vee (p_0 \wedge \square X) = t_1(X)$$

Jeux à une seule couleur

Considérons un jeu de parité à une seule couleur *paire* : J_0 gagne si J_1 est bloqué, ou si la partie est infinie.

Soit $T_0 = |\nu X.t_0(X)|$, et soit $v \in T_0$: ou bien $v \in V_1$ et tout successeur de v est dans T_0 , ou bien $v \in V_0$, et v a au moins un successeur dans T_0 . Par conséquent, depuis tout sommet de T_0 , J_0 a une stratégie positionnelle gagnante σ (il suffit de choisir, pour tout sommet $v \in T_0 \cap V_0$, un successeur $\sigma(v) \in T_0$).

Le complémentaire T_1 de T_0 peut s'exprimer par le μ -terme $\mu Y.t_1(Y)$: on a donc (d'après le deuxième théorème de Knaster-Tarski)

$$T_1 = \bigcup_{n \geq 0} |t_1^n(\perp)|$$

À tout sommet v de T_1 on associe le plus petit entier n_v tel que $v \in |t_1^{n_v+1}(\perp)|$. Ou bien $v \in V_0$ et tout successeur de v est dans $|t_1^{n_v}(\perp)|$, ou bien $v \in V_1$ et on peut choisir dans $|t_1^{n_v}(\perp)|$ un successeur $\sigma(v)$; comme v' est dans $|t_1^{n_v}(\perp)|$, $n_{\sigma(v)} \leq n_v - 1$.

Soit $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_p \rightarrow \dots$ une partie commençant dans T_1 et jouée par J_1 suivant la stratégie σ : tous les sommets de la partie sont dans T_1 , et par construction, la suite des entiers n_{v_p} est strictement décroissante, donc la partie est finie; et comme J_1 n'est jamais bloqué, la partie est gagnante pour J_1 .

Donc J_1 a une stratégie gagnante positionnelle gagnante depuis tout sommet de $T_1 = \overline{T_0}$.

En définitive, l'ensemble des sommets depuis lesquels J_0 a une stratégie gagnante est T_0 .

Dans un jeu à une seule couleur *impaire*, J_1 gagne si J_0 est bloqué, ou si la partie est infinie : par symétrie (en inversant les rôles des deux joueurs), l'ensemble des sommets depuis lesquels J_0 a une stratégie gagnante peut s'exprimer par le μ -terme $\mu X.t_0(X)$.

Jeux à 2 couleurs

Considérons un jeu de parité à 2 couleurs 0 et 1 : J_1 gagne si J_0 est bloqué, ou si la partie comporte une infinité de sommets de couleur 1.

Soit T_1 l'ensemble des sommets représentés par le μ -terme

$$g_1 = \nu Y. \mu X. (c_1 \wedge t_1(Y)) \vee (c_0 \wedge t_1(X))$$

T_1 est un point fixe de la fonction $Y \rightarrow |\mu X. (c_1 \wedge t_1(Y)) \vee (c_0 \wedge t_1(X))|$, donc (d'après le deuxième théorème de Knaster-Tarski)

$$T_1 = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\emptyset)$$

où f désigne l'interprétation fonctionnelle du μ -terme $(c_1 \wedge t_1(g_1)) \vee (c_0 \wedge t_1(X))$.

Notons que $f(\emptyset)$ est l'interprétation du μ -terme

$$(c_1 \wedge t_1(g_1)) \vee (c_0 \wedge t_0(\perp)) \equiv (c_1 \wedge t_1(g_1)) \vee (c_0 \wedge p_0 \wedge \square \perp)$$

À tout sommet $v \in T_1$ on associe le plus petit entier n_v tel que $v \in f^{n_v+1}(\emptyset)$.

– Si $n_v = 0$, $v \in f(\emptyset)$. Si v est une position du joueur J_1 , v est nécessairement de couleur 1 et on peut choisir un successeur $\sigma(v)$ de v dans T_1 . Si v est une position du joueur J_0 , ou bien v est de couleur 0 et n'admet aucun successeur, ou bien v est de couleur 1 et tous ses successeurs sont dans T_1 .

– Si $n_v > 0$, ou bien v est une position du joueur J_1 et on peut choisir un successeur $\sigma(v)$ de v dans $f^{n_v}(\emptyset)$, ou bien v est une position du joueur J_0 et tous ses successeurs sont dans $f^{n_v}(\emptyset)$.

Soit $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_p \rightarrow \dots$ une partie commençant dans T_1 et jouée par J_1 suivant la stratégie σ : J_1 n'est jamais bloqué, donc il gagne si la partie est finie. Si la partie est infinie, elle comporte une infinité de sommets de couleur 1 (sans cela, la suite des n_{v_p} serait strictement décroissante).

En définitive, J_1 a une stratégie positionnelle gagnante depuis tout sommet de T_1 .

Réciproquement, le complémentaire T_0 de T_1 peut s'exprimer par le μ -terme dual

$$\mu X. \nu Y. (c_1 \wedge t_0(X)) \vee (c_0 \wedge t_0(Y))$$

et $T_0 = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\emptyset)$, où f désigne l'interprétation fonctionnelle du μ -terme

$$\nu Y. (c_1 \wedge t_0(X)) \vee (c_0 \wedge t_0(Y))$$

À tout sommet $v \in T_0$ on associe le plus petit entier n_v tel que $v \in f^{n_v+1}(\emptyset)$.

– Si $n_v = 0$, $v \in f(\emptyset) = |\nu Y. (c_1 \wedge t_0(\perp)) \vee (c_0 \wedge t_0(Y))| = |\nu Y. (c_1 \wedge p_1 \wedge \square \perp) \vee (c_0 \wedge t_0(Y))|$.

Si v est une position du joueur J_0 , v est nécessairement de couleur 0 et on peut choisir un successeur $\sigma(v)$ de v dans $f(\emptyset)$. Si v est une position du joueur J_1 , ou bien v est de couleur 1 et n'admet aucun successeur, ou bien v est de couleur 0 et tous ses successeurs sont dans $f(\emptyset)$.

– Si $n_v > 0$, ou bien v est une position du joueur J_0 et on peut choisir un successeur $\sigma(v)$ de v dans $f^{n_v}(\emptyset)$, ou bien v est une position du joueur J_1 et tous ses successeurs sont dans $f^{n_v}(\emptyset)$.

Soit $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_p \rightarrow \dots$ une partie commençant dans T_0 et jouée par J_0 suivant la stratégie σ : J_0 n'est jamais bloqué, donc il gagne si la partie est finie. Si la partie est infinie, la suite des n_{v_p} est décroissante, et si v_p est de couleur 1 on a $n_{v_{p+1}} < n_{v_p}$: il ne peut donc y avoir qu'un nombre fini de sommets de couleur 1, et là encore J_0 est gagnant.

En définitive, J_0 a une stratégie positionnelle gagnante depuis tout sommet de T_0 .

Cas général

Le raisonnement se généralise à tout jeu de parité : si toutes les couleurs sont $\leq 2k$, les positions depuis lesquelles J_0 a une stratégie gagnante s'expriment par le μ -terme

$$\nu X_{2k} \cdot \mu X_{2k-1} \cdots \mu X_1 \cdot \nu X_0 \cdot \bigvee_{0 \leq i \leq 2k} (c_i \wedge t_0(X_i))$$

et on peut calculer une stratégie positionnelle gagnante sur le même principe que ci-dessus (en exprimant les plus petits points fixes comme des limites de suites croissantes).