

Contrôle à la Ramadge/Wonham

Supervision

- Le système S à superviser est discret, avec ensemble d'évènements (actions) Σ divisé en Σ_c , l'ensemble des actions contrôlables et Σ_u , l'ensemble des actions non-contrôlables.
Exemple : pour une imprimante S , Σ_u représente l'ensemble des actions des utilisateurs (print, cancel, switch off, etc). L'ensemble Σ_c représente les actions que l'on peut autoriser/interdire, par exemple on peut interdire une impression d'un utilisateur si elle dépasse une taille donnée.
- On s'intéresse à des langages L **préfixiels** : si $v \in L$ et u préfixe de v ($u \leq v$), alors $u \in L$.
- Un **superviseur** pour un langage L est une fonction

$$s : L \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma)$$

tel que $\Sigma_u \subseteq s(w)$ pour tout $w \in L$. Le superviseur indique donc l'ensemble $s(w)$ d'actions possibles après l'historique d'actions w , et n'interdit aucune action non-contrôlable.

Supervision de systèmes finis

Système fini

On modélise le système à superviser en tant qu'automate fini (déterministe) $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$: S ensemble d'états, $s_0 \in S$ état initial, $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$ fonction (partielle) de transition, $F \subseteq S$ états acceptants. On note $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ le langage de \mathcal{A} , ainsi que $\text{Ch}(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots étiquetant un chemin dans \mathcal{A} qui commence par l'état initial.

Système supervisé

Etant donné un automate \mathcal{A} et un superviseur s , le **comportement supervisé** de \mathcal{A} est le langage préfixiel $\text{Ch}_s(\mathcal{A})$ défini de manière inductive par :

- $\epsilon \in \text{Ch}_s(\mathcal{A})$
- Pour tout $w \in \text{Ch}_s(\mathcal{A})$ et $a \in \Sigma$: $wa \in \text{Ch}_s(\mathcal{A})$ ssi $wa \in \text{Ch}(\mathcal{A})$ et $a \in s(w)$.

Le **langage supervisé** de \mathcal{A} : $\mathcal{L}_s(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \text{Ch}_s(\mathcal{A})$.

Le système supervisé est **non-bloquant**, si tout chemin supervisé peut atteindre un état acceptant : pour tout $u \in \text{Ch}_s(\mathcal{A})$ il existe v t.q. $uv \in \mathcal{L}_s(\mathcal{A})$.

Supervision de systèmes finis

Rem.

La propriété d'être non-bloquant est équivalente à l'égalité entre $\text{Ch}_s(\mathcal{A})$ et la clôture prefixielle de $\mathcal{L}_s(\mathcal{A})$, notée $\text{Pref}(\mathcal{L}_s(\mathcal{A}))$.

Contrôlabilité

Un langage $\text{Spec} \subseteq \Sigma^*$ est **contrôlable** (par rapport à un système \mathcal{A}), si

$$\text{Pref}(\text{Spec})\Sigma_u \cap \text{Ch}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Pref}(\text{Spec})$$

Autrement dit : toute action non-contrôlable qui est possible après une exécution de Spec dans le système \mathcal{A} , est possible aussi dans Spec .

Rem.

L'ensemble vide \emptyset et l'ensemble Σ^* sont contrôlables (quelque soit \mathcal{A} avec alphabet Σ).

Supervision de systèmes finis

Prop.

Soit \mathcal{A} un automate fini et $\text{Spec} \subseteq \text{Ch}(\mathcal{A})$ un langage préfixiel régulier et non-vidé. Alors Spec est contrôlable ssi il existe un superviseur s t.q. $\mathcal{L}_s(\mathcal{A}) = \text{Spec}$. De plus, si un tel s existe, alors il existe un à mémoire finie.

Prop.

Soit \mathcal{A} un automate fini où tout état est co-accessible, et $\text{Spec} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$ un langage régulier non-vidé. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- 1 il existe un superviseur s t.q. \mathcal{A} supervisé par s est non-bloquant et $\mathcal{L}_s(\mathcal{A}) = \text{Spec}$.
- 2 Spec est contrôlable et $\text{Pref}(\text{Spec}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \text{Spec}$.

De plus, si un tel s existe, alors il existe un à mémoire finie.

Exemple

$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (a^+b)^*a^*$, Spec : “au plus deux a consécutifs”. Spec est contrôlable ssi $a \in \Sigma_c$. Si $a \in \Sigma_c$, alors superviser \mathcal{A} signifie de compter le nombre de a vus depuis le dernier b , et d’interdire que ce nombre dépasse 2.

Supervision de systèmes finis

Sous-langage supervisé maximal

Soit $\text{Spec} \subseteq \text{Ch}(\mathcal{A})$. Le sous-langage contrôlable maximal $\text{Spec}_{\max} \subseteq \text{Spec}$ de Spec est défini par

$$\text{Spec}_{\max} = \max \mathcal{C}(\text{Spec})$$

où $\mathcal{C}(\text{Spec})$ est l'ensemble des parties contrôlables K de Spec (Rem. : l'union de 2 parties contrôlables est aussi contrôlable).

Calcul de Spec_{\max}

On calcule Spec_{\max} par un (plus grand) point fixe. On définit une fonction $F : \mathcal{P}(\Sigma^*) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ par

$$F(K) = \max\{J \subseteq K \mid \text{Pref}(J)\Sigma_u \cap \text{Ch}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Pref}(K)\}$$

Prop.

Spec_{\max} est le plus grand point fixe de F : (1) $\text{Spec}_{\max} = F(\text{Spec}_{\max})$, et (2) pour tout $K \subseteq \text{Spec}$ tel que $F(K) = K$, on a $K \subseteq \text{Spec}_{\max}$.