

Jeux sur des graphes finis

Arène de jeu

$$\mathcal{A} = (V_0, V_1, E)$$

- Deux joueurs J_0 et J_1 . L'ensemble des sommets est partitionné en deux ensembles disjoints V_0 (sommets appartenant à J_0) et V_1 (sommets appartenant à J_1).
- Ensemble d'arêtes $E \subseteq V \times V$, $V = V_0 \cup V_1$.

Parties

Une **partie** dans \mathcal{A} est

- soit un chemin infini $\pi = v_0, v_1, \dots$ dans le graphe (V, E) ,
- ou un chemin fini $\pi = v_0, v_1, \dots, v_n$ dans (V, E) tel que v_n n'a pas de successeur dans (V, E) .

.Jeux et stratégies

Jeux

Un jeu est décrit par une paire $(\mathcal{A}, \text{Win})$, où \mathcal{A} est une arène et $\text{Win} \subseteq V^\omega$ est la condition de victoire.

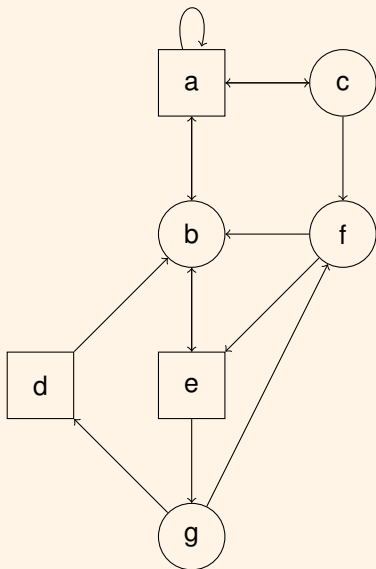
Exemples (où $F \subseteq V$ et $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(V)$) :

- jeux **d'accessibilité** : $\text{Win} = V^* F V^\omega$
- jeux **d'obligation** : $\text{Win} = F^\omega$ pour $F \in \mathcal{F}$
- jeux **de Büchi (répétition)** : $\text{Win} = (V^* F)^\omega$
- jeux **de Muller** : $\text{Win} = \{\pi \in V^\omega \mid \text{Inf}(\pi) \in \mathcal{F}\}$
- jeux **de parité**...

Stratégies

- Stratégie de J_0 : fonction $f : V^* V_0 \rightarrow V$
t.q. $f(\pi v) \in vE := \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$, où $\pi \in V^*$, $v \in V$.
- Partie $\pi = v_0, v_1, \dots$ conforme avec stratégie f de J_0 : $v_{i+1} = f(v_0 \cdots v_i)$
pour tout i t.q. $v_i \in V_0$.
- Stratégie **positionnelle** : $f : V_0 \rightarrow V$ t.q. $f(v) \in vE$ pour tout $v \in V_0$.

Example



$F = \{a, d\}$: J_0 gagne partout ;

$F = \{e\}$: J_0 gagne partout sauf dans a

Jeux d'accessibilité

Attracteurs

$$\begin{aligned}\text{Attr}_0^0(F) &= F \\ \text{Attr}_0^{n+1}(F) &= \text{Attr}_0^n(F) \cup \\ &\quad \{v \in V_0 \mid \exists w \in \text{Attr}_0^n(F), (v, w) \in E\} \\ &\quad \{v \in V_1 \mid \forall w \in \text{Attr}_0^n(F), (v, w) \in E\}\end{aligned}$$

$$\text{Attr}_0^0(F) \subseteq \text{Attr}_0^1(F) \subseteq \dots \subseteq \text{Attr}_0^{|V|}(F)$$

$\text{Attr}_0^i(F)$ est l'ensemble des nœuds à partir desquels J_0 peut forcer la partie d'arriver à F en moins de i coups. $\text{Attr}_0^{|V|}(F)$ est la **région gagnante** de J_0 , et $V \setminus \text{Attr}_0^{|V|}(F)$ est la région gagnante de J_1 .

Jeux d'accessibilité

Les jeux d'accessibilité sont **déterminés** : à partir de chaque sommet, un des deux joueurs a une stratégie gagnante. Les stratégies gagnantes sont positionnelles (stratégies d'attracteur).

Jeux d'obligation

Définition

La condition de victoire d'un jeu d'obligation est un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(V)$ d'ensembles d'états. Le joueur J_0 gagne une partie π , si l'ensemble $\text{Occ}(\pi)$ d'états rencontrés dans π appartient à \mathcal{F} (i.e., combinaison booléenne de conditions d'accessibilité).

Réduction

On réduit un jeu d'obligation à un jeu plus simple (et plus grand) : jeu de **parité faible**.

- Dans un jeu de parité faible on colorie les sommets par des entiers : $\chi : V \rightarrow \mathbb{N}$. Le joueur J_0 gagne une partie π si $\max(\text{Occ}(\pi))$ est pair.
- Réduction : arène $\mathcal{A}' = (V'_0, V'_1, E')$ avec $V'_0 = V_0 \times \mathcal{P}(V)$, $V'_1 = V_1 \times \mathcal{P}(V)$, $E' = \{(v, R) \rightarrow (w, R \cup \{v\}) \mid (v, w) \in E\}$. Coloriage : $\chi(v, R) = 2|R|$ si $R \in \mathcal{F}$; $\chi(v, R) = 2|R| - 1$ si $R \notin \mathcal{F}$.
- Les jeux de parité faible ont des stratégies gagnantes positionnelles. En conséquence, on peut obtenir des stratégies gagnantes à mémoire finie pour les jeux d'obligation.