

1 Points fixes

1.1 Exemples

Limite d'une suite définie par une relation de récurrence

On peut définir une suite réelle u_n par son premier terme u_0 et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On démontre facilement que si la fonction f est continue et que la suite admet une limite, cette limite est un point fixe de f .

Cette propriété est utilisée pour calculer des valeurs approchées d'un nombre lorsqu'on sait que ce nombre est l'unique point fixe d'une fonction continue.

Par exemple, si $\sqrt{5}$ est l'unique point fixe de la fonction f de $[0, +\infty[$ dans lui-même définie par

$$f(x) = \frac{x+5}{x+1}$$

On peut montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente; par conséquent la suite u_n a pour limite $\sqrt{5}$.

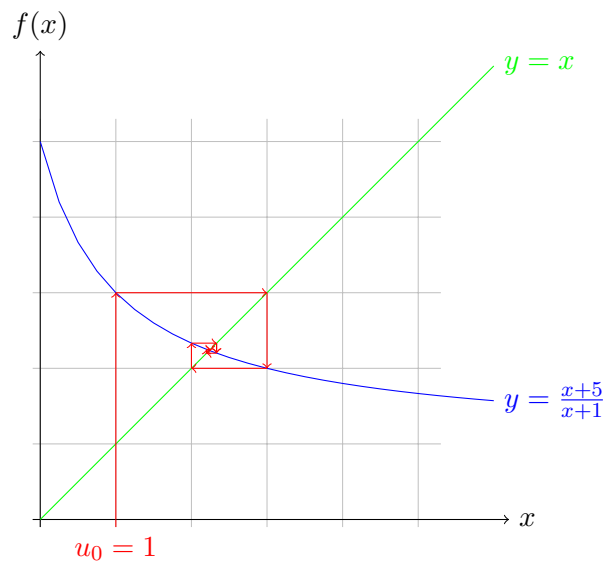


FIG. 1 – $\sqrt{5}$ comme limite de suite récurrente

Remarque : $\sqrt{5}$ est aussi bien l'unique point fixe de la fonction g de $[0, +\infty[$ dans lui-même définie par $g(x) = \frac{5}{x}$. Mais les suites récurrentes définies par $u_{n+1} = g(u_n)$ ne convergent pas (les valeurs successives sont $u_0, \frac{5}{u_0}, u_0, \frac{5}{u_0}, \dots$)

Boucles while

Les tris par permutations ont la forme générale

```
tant que t n'est pas trié
  échanger deux éléments t[i] et t[j]
  tels que i < j et t[i] > t[j]
```

les algorithmes de tri se distinguant par le choix des éléments à échanger, de façon à minimiser le nombre de comparaisons et de permutations nécessaires. Dans tous les cas, cela revient à calculer l'unique point fixe d'une fonction qui modifie tout tableau non trié.

Plus généralement, on peut interpréter comme un point fixe la sémantique d'une boucle `while`, c'est-à-dire la façon dont elle modifie l'environnement (la liste des valeurs des variables) : l'environnement obtenu après exécution de

```
while (C(X)) // C(X): condition sur l'environnement X
  X = g(X) ; // corps de boucle
```

est un point fixe de la fonction qui à un environnement X associe $g(X)$ si $C(X)$ est vraie, et X lui-même sinon.

Définitions inductives

La définition inductive d'un ensemble E est la donnée d'éléments de base, et d'opérations permettant d'obtenir de nouveaux éléments à partir de ceux que l'on a déjà. Le schéma général est

(base) $B \subseteq E$

(induction) si $X \subseteq E$, alors $C(X) \subseteq E$

où B est l'ensemble des éléments de base, et $C(X)$ désigne l'ensemble des éléments qu'on peut construire à partir des éléments d'un ensemble X . E est par définition l'ensemble des éléments que l'on peut obtenir à partir des éléments de base en appliquant un nombre fini de fois les opérations de construction ; c'est un point fixe de la fonction $f(X) = B \cup C(X)$, et plus précisément le *plus petit* des points fixes de f pour l'inclusion d'ensembles.

Exemples :

- Le langage engendré par l'automate

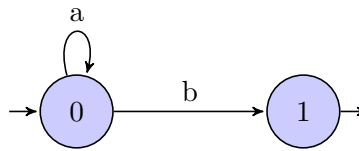


FIG. 2 – Automate reconnaissant a^*b

est $L_{0 \rightarrow 1} = bL_{1 \rightarrow 1} \cup L_{0 \rightarrow 1}$, plus petit (et d'ailleurs unique) point fixe de la fonction $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ définie par $f(X) = \{b\} \cup aX$.

- La grammaire définie par $S \rightarrow \varepsilon | aSb$ engendre le langage $\{a^n b^n / n \geq 0\}$, plus petit point fixe de la fonction $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ définie par $f(X) = \{\varepsilon\} \cup aXb$.
- La grammaire définie par les règles $S \rightarrow \varepsilon | aTb$ et $T \rightarrow aS$ engendre le langage L_S tel que le *couple* (L_S, L_T) soit le plus petit point fixe de la fonction f définie par

$$f(X, Y) = (\{\varepsilon\} \cup aYb, aX)$$

- La relation d'accessibilité dans un graphe peut être définie de façon inductive :

$$s \text{ est accessible depuis } s_0 \iff \begin{cases} s = s_0 \\ \text{ou} \\ s \text{ est le successeur d'un sommet accessible depuis } s_0 \end{cases}$$

ce qui revient à définir l'ensemble $Accessibles(s_0)$ comme le plus petit point fixe de la fonction $f(X) = \{s_0\} \cup f(Successeurs(X))$.

1.2 Plus petits et plus grands points fixes de fonctions continues

Un ensemble ordonné E est dit **sup-complet** s'il admet un plus petit élément (habituellement noté \perp , *bottom*) et que toute partie non vide de E admet une borne supérieure. Symétriquement, E est dit **inf-complet** s'il admet un plus grand élément (habituellement noté \top , *top*) et que toute partie non vide de E admet une borne inférieure. Un ensemble ordonné est dit **complet** s'il est à la fois sup-complet et inf-complet.

Exemples et contre-exemples :

- L'intervalle réel $[0, 1]$ est complet pour l'ordre usuel.
- \mathbb{N} n'est pas complet pour l'ordre usuel (pas de plus grand élément).
- L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de n'importe quel ensemble X , ordonné par inclusion, est complet (la borne supérieure d'un ensemble de parties de X est la réunion de ces parties, la borne inférieure est leur intersection).
- Soient E et F des ensembles ordonnés complets. L'ensemble $E \times F$, ordonné par ordre produit, est complet (démonstration laissée en exercice).
- Soit E l'ensemble des applications d'un ensemble X quelconque dans un ensemble ordonné Y . On peut ordonner E par

$$f \leq g \iff_{\text{def.}} \forall x \in X, f(x) \leq g(x)$$

(démonstration laissée en exercice).

On dit qu'une fonction f d'un ensemble ordonné sup-complet E dans un ensemble sup-complet F est **continue à gauche** (pour l'ordre) si elle préserve les bornes supérieures, c'est-à-dire si pour toute partie non vide totalement ordonnée X de E

$$\sup\{f(x) / x \in X\} = f(\sup X)$$

On définit de même les fonctions **continues à droite** des ensembles ordonnés inf-complets comme celles qui préservent les bornes inférieures.

Remarques :

1. Une fonction continue (à gauche ou à droite) est nécessairement croissante : en effet, supposons f continue à gauche : si $x \leq y$

$$\sup\{f(x), f(y)\} = f(\sup(x, y)) = f(y)$$

et par conséquent $f(x) \leq f(y)$.

2. Mais une fonction croissante n'est pas nécessairement continue : par exemple, la fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}x$ si $x < \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{3}{4}x$ si $x \geq \frac{1}{2}$ n'est pas continue à gauche, puisque $\sup f([0, \frac{1}{2}[) = \frac{1}{8}$ diffère de $f(\sup[0, \frac{1}{2}[) = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$. (Remarque : les fonctions de $[0, 1]$ dans lui-même continues pour l'ordre sont les fonctions croissantes qui sont continues au sens usuel du terme.)

Théorème de Knaster-Tarski : Si f est une application croissante d'un ensemble ordonné sup-complet E dans lui-même, f admet un plus petit point fixe.

Si de plus f est continue à gauche, son plus petit point fixe est la borne supérieure de la suite $f^n(\perp)$, c'est-à-dire de la suite x_n définie par $x_0 = \perp$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

De même, si f est une application croissante d'un ensemble ordonné inf-complet dans lui-même, elle admet un plus grand point fixe, et si de plus f est continue à droite, son plus grand point fixe est la borne inférieure de la suite $f^n(\top)$.

Démonstration. Supposons f croissante. L'ensemble $I = \{x \in E / f(x) \leq x\}$ n'est pas vide (il contient \top), il admet donc une borne inférieure a . Pour tout x de E on a $a \leq x$, donc $f(a) \leq f(x)$ (puisque f est croissante), donc $f(a) \leq x$ (puisque $f(x) \leq x$). Par conséquent $f(a)$ est un minorant de I , et comme a est le plus grand minorant de I , $f(a) \leq a$: en d'autres termes, $a \in I$, et comme a minore I , a est le plus petit élément de I .

De $f(a) \leq a$ on déduit $f(f(a)) \leq f(a)$ et par conséquent $f(a) \in I$. Donc $a \leq f(a)$ puisque a est le plus petit élément de I , et en définitive $f(a) = a$: a est un point fixe de f , et comme tout point fixe de f est élément de I , a est bien le plus petit point fixe de f .

La suite x_n est croissante : en effet, $x_0 = \perp \leq x_1$, et si $x_{n-1} \leq x_n$, $f(x_{n-1}) \leq f(x_n)$ (puisque f est croissante), c'est-à-dire $x_n \leq x_{n+1}$.

L'ensemble $X = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ admet une borne supérieure.

Si f est continue à gauche, $\sup\{f(x) / x \in X\} = f(\sup X)$.

Mais l'ensemble $\{f(x) / x \in X\} = \{x_{n+1} / n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des éléments de X , sauf peut-être \perp : il a donc même borne supérieure que X , et par conséquent $\sup X = f(\sup X)$; $\sup X$ est ainsi un point fixe de f .

Soit a un point fixe de f . Pour tout entier n , $x_n \leq a$: en effet, $x_0 = \perp \leq a$ et si $x_n \leq a$, $x_{n+1} = f(x_n) \leq f(a) = a$. Donc a est un majorant de X , et par suite $\sup X \leq a$.

En définitive, $\sup X$ est le plus petit point fixe de f .

(Démonstration analogue pour les plus grands points fixes.)

□

Remarque : Si f est croissante et que, pour un certain entier p , $x_{p+1} = x_p$, alors x_p est le plus petit point fixe de f (même si f n'est pas continue à gauche en général) : en effet, $x_p = f(x_p)$ est alors un point fixe de f , et comme ci-dessus on montre par récurrence sur n que tout point fixe de f est supérieur à tout x_n , donc en particulier à x_p .