

### 3 Le $\mu$ -calcul

Les  $\mu$ -calculs **propositionnels** sont des logiques propositionnelles dont les formules comportent des variables quantifiées par un opérateur de plus petit point fixe  $\mu$  : toute formule  $f$  a une interprétation fonctionnelle  $|f|$ , et, si  $X$  est une variable non quantifiée de  $f$ , la formule  $\mu X.f$  s'interprète comme le plus petit point fixe de la fonction  $X \rightarrow |f|$ .

#### 3.1 Syntaxe et sémantique du $\mu$ -calcul modal

On se donne un alphabet de **variables**  $X, Y, Z, \dots$  et un ensemble de **formules atomiques**  $p, q, \dots$

Les formules du  $\mu$ -calcul modal, ou  $\mu$ -termes, sont engendrés par la grammaire

$$t := \top \mid \perp \mid p \mid X \mid t \vee t \mid t \wedge t \mid \neg t \mid t \Rightarrow t \mid []t \mid []t \mid \mu X.t \mid \nu X.t$$

avec deux restrictions syntaxiques pour les termes de la forme  $\mu X.t$  ou  $\nu X.t$  :

- la variable  $X$  ne peut apparaître dans  $t$  que comme une variable libre (non quantifiée par un opérateur  $\mu$  ou  $\nu$ )
- la variable  $X$  ne peut apparaître dans  $t$  que sous un nombre *pair* de  $\neg$  (restriction dite de **monotonie syntaxique**).

Un  $\mu$ -terme est dit **clos** s'il ne comporte aucune variable  $X$ .

Les modèles du  $\mu$ -calcul modal sont des structures à la Kripke, c'est-à-dire des graphes orientés  $(V, E)$  dont les sommets sont étiquetés par des ensembles de formules atomiques (mais on n'impose pas que tout sommet ait un successeur). Chaque  $\mu$ -terme  $t$  où interviennent librement les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  s'interprète comme une fonction  $|t|$  de  $(\mathcal{P}(V))^n$  dans  $\mathcal{P}(V)$  :

- $|\top| = V, |\perp| = \emptyset$
- si  $p$  est une formule atomique,  $|p|$  est l'ensemble des sommets étiquetés  $p$  (fonctions constantes)
- $X$  s'interprète comme la fonction  $X \rightarrow X$
- $|t_1 \vee t_2| = |t_1| \cup |t_2|, |t_1 \wedge t_2| = |t_1| \cap |t_2|, |\neg t| = \overline{|t|}, |t_1 \Rightarrow t_2| = \overline{|t_1|} \cup |t_2|$
- $||t| = \text{Pred}(|t|), |[ ]t| = \widetilde{\text{Pred}}(|t|)$  (opérateurs modaux)
- $|\mu X.t|$  est le plus petit point fixe de la fonction  $X \rightarrow |t|$  (nécessairement croissante par rapport à  $X$  pour l'inclusion),  $|\nu X.t|$  son plus grand point fixe.

On notera  $t_1 \equiv t_2$  l'équivalence sémantique des  $\mu$ -termes  $t_1$  et  $t_2$ , c'est-à-dire le fait que  $t_1$  et  $t_2$  s'interprètent de la même façon dans tous les modèles.

## Exemples

le $\mu$ -terme	s'interprète comme l'ensemble des sommets depuis lesquels
$\mu X.p \vee \langle \rangle X$	il est possible d'atteindre un sommet de $ p $
$\mu X.p \wedge []X$	tout chemin infini passe par un sommet de $ p $
$\mu X.[]X$	tout chemin est fini
$\nu X.\langle \rangle X$	il existe un chemin infini
$\nu X.p \wedge \langle \rangle X$	il existe un chemin infini dont tous les sommets sont dans $ p $

Remarque :  $\mu X.\langle \rangle X \equiv \perp$  et  $\nu X.[]X \equiv \top$ .

## Dualité

Les opérateurs  $\langle \rangle$  et  $[]$  sont duaux, au sens où  $\neg \langle \rangle X \equiv [] \neg X$  et  $\neg [] X \equiv \langle \rangle \neg X$ .

Plus généralement, si la variable  $X$  apparaît librement dans un  $\mu$ -terme  $t$ , le  $\mu$ -terme **dual de  $t$  par rapport à  $X$**  est le  $\mu$ -terme  $\tilde{t}$  obtenu en remplaçant  $X$  par  $\neg X$  dans  $\neg t$ ; clairement,  $\tilde{\tilde{t}} \equiv t$ .

Des équivalences  $\neg \nu X.t \equiv \mu X.\tilde{t}$  et  $\neg \mu X.t \equiv \nu X.\tilde{t}$  (immédiates d'après le théorème de Knaster-Tarski) et des relations de dualité ( $\vee$  et  $\wedge$ ,  $\langle \rangle$  et  $[]$ ), il résulte que tout  $\mu$ -terme clos est équivalent à un  $\mu$ -terme dans lequel les opérateurs  $\neg$  n'apparaissent que dans des sous-termes  $\neg p$ , où  $p$  est une formule atomique.

## 3.2 $\mu$ -calcul modal et CTL

Toute formule de CTL peut s'exprimer par un  $\mu$ -terme, on le prouve par induction sur la structure des formules de CTL :

- $EXp \longrightarrow \langle \rangle p$
- $AXp \longrightarrow []p$
- $EqUp \longrightarrow \mu X.p \vee (\langle \rangle X \wedge q)$
- $AqUp \longrightarrow \mu X.p \vee ([]X \wedge q)$ <sup>1</sup>

Le  $\mu$ -calcul est strictement plus expressif que CTL, comme le prouve l'exemple

$$\nu X.\mu Y.(\langle \rangle p \wedge X) \vee \langle \rangle Y$$

qui s'interprète comme l'ensemble  $I$  des sommets depuis lesquels il existe un chemin passant infiniment souvent par un sommet de  $|p|$ .

---

<sup>1</sup>Cette équivalence suppose que les modèles sont des graphes dans lesquels tout sommet a un successeur. On peut interpréter  $AqUp$ , dans un graphe quelconque, comme "tout chemin *maximal* (infini, ou aboutissant dans un état sans successeur) satisfait  $qUp$ "; soit encore "il n'est possible ni d'atteindre  $\neg q$  avant d'avoir atteint  $p$ , ni de demeurer indéfiniment dans  $\neg p$ ".

Ce qui s'exprime par le  $\mu$ -terme  $(\mu X.p \vee []X \wedge q) \wedge (\mu Y.p \wedge []Y)$ .

En effet,  $\mu Y.(\langle \rangle p \wedge X) \vee \langle \rangle Y$  s'interprète comme la fonction  $f$  qui à un ensemble de sommets  $X$  associe l'ensemble des sommets depuis lesquels il est possible d'atteindre un sommet de  $|p| \cap X$ .

$I$  est inclus dans  $f(I)$  : en effet, pour tout sommet  $s$  de  $I$  il existe un chemin

$$s \rightarrow \dots \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_n \rightarrow \dots$$

avec  $s_1, \dots, s_n, \dots \in |p|$ ; de  $s$  on peut atteindre  $s_1 \in |p| \cap I$ , donc  $s \in f(I)$ .

Réciproquement, si depuis  $s$  on peut atteindre un sommet de  $I$ , alors  $s \in I$  (évident), donc  $f(I)$  est inclus dans  $I$ .

Par conséquent  $I$  est un point fixe de  $f$ .

Tout point fixe de  $f$  est inclus dans  $I$  : en effet, si  $X = f(X)$ , depuis tout sommet  $s \in X$  il est possible d'atteindre un sommet  $s_1$  de  $|p| \cap X$ . Par induction, on peut construire un chemin

$$s \rightarrow \dots \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_n \rightarrow \dots$$

passant par une infinité de sommets de  $|p|$ , donc  $s \in I$ .

$I$  est donc le plus grand point fixe de  $f$ .

□

### 3.3 Complexité du calcul ; points fixes alternés

L'évaluation d'un  $\mu$ -terme clos  $t$ , dans un graphe fini donné, consiste à marquer les sommets de  $|t|$ .

Si  $t$  ne comporte aucun opérateur de point fixe, l'évaluation peut se faire en temps linéaire par rapport à la taille du graphe (c'est évident pour les formules atomiques, les sommets étant déjà étiquetés ; calculer  $\langle \rangle t$  revient à parcourir le graphe en marquant les sommets dont un successeur est marqué  $t$ , etc.)

L'algorithme naïf d'évaluation de  $\mu X.t$  consiste à marquer successivement  $|t|(\emptyset), \dots, |t|^n(\emptyset)$  jusqu'à ce qu'on atteigne le point fixe (aucun nouveau sommet marqué). Comme à chaque étape (sauf la dernière) on aura marqué au moins un sommet,  $n$  sera au plus égal à  $n_v + 1$ , où  $n_v$  est le nombre de sommets du graphe ; si  $|t|$  se calcule en temps  $T$ , l'évaluation de  $\mu X.t$  peut donc se faire en temps  $O(n_v \times T)$ .

On peut ainsi grossièrement borner la complexité du calcul par  $O(g^k)$  où  $g$  est la taille du graphe, et  $k$  le nombre maximal de points fixes imbriqués.

Notons que dans un  $\mu$ -terme tel que  $\mu X.(\nu Y.\langle \rangle Y) \vee []X$  les points fixes ne sont pas réellement imbriqués : on peut d'abord calculer le  $\mu$ -terme clos  $K = \nu Y.\langle \rangle Y$  en temps  $O(g^2)$ , puis  $\mu X.K \vee []X$  en temps  $O(g^2)$ .

D'autre part, un  $\mu$ -terme tel que  $t = \mu X.p \vee \langle \rangle \mu Y.(q \wedge X) \vee \langle \rangle Y$  peut se calculer comme la première composante du plus petit point fixe d'une fonction de deux variables : on utilise deux marques  $X$  et  $Y$ , et tant qu'on marque des sommets on répète

$$\begin{aligned} X &:= f(X, Y) \\ Y &:= g(X, Y) \end{aligned}$$

où  $f(x, Y)$  est l'interprétation fonctionnelle de  $p \vee \langle \rangle Y$ , et  $g(X, Y)$  celle de  $(q \wedge X) \vee \langle \rangle Y$ . Les inclusions  $X \subseteq |t|$  et  $Y \subseteq |\mu Y.(q \wedge X) \vee \langle \rangle Y|$  restent vraies à chaque étape de l'algorithme (invariant de boucle). À la fin de l'algorithme,  $Y = g(X, Y)$  contient le plus petit point fixe  $Z$  de la fonction  $Y \rightarrow g(X, Y)$ , et  $X = f(X, g(X, Y))$  contient le plus petit point fixe de la fonction  $X \rightarrow f(X, g(X, Z))$ , d'où l'on déduit que  $X$  contient  $|t|$ . En définitive,  $X$  est bien égal à  $|t|$ .

La méthode se généralise à toute imbrication de points fixes : l'algorithme naïf permet ainsi de calculer tout  $\mu$ -terme dans lequel les points fixes imbriqués sont tous de même nature (plus petits ou plus grands) en temps  $O(f \times g^2)$ , où  $f$  est la taille de la formule, et  $g$  celle du graphe<sup>2</sup>.

### 3.4 $\mu$ -calcul et langages $\omega$ -rationnels

On considère ici une variante du  $\mu$ -calcul modal s'interprétant dans les systèmes de transition étiquetés (graphes dont on étiquette les arêtes).

Les opérateurs modaux sont indexés par un alphabet d'actions  $a, b, \dots : \langle a \rangle t$  s'interprète comme l'ensemble des sommets qui ont au moins un successeur dans  $|t|$  par une transition d'étiquette  $a$ ,  $[a]t$  comme l'ensemble des sommets dont tout successeur par une transition d'étiquette  $a$  est dans  $|t|$ .

#### Exemples

le $\mu$ -terme	s'interprète comme l'ensemble des sommets depuis lesquels
$\mu X.p \vee \langle a \rangle X$	il est possible d'atteindre $ p $ par un chemin dont l'étiquette est dans $a^*$
$\nu X.\langle a \rangle X$	il existe un chemin d'étiquette $a^\omega$
$\nu X.\mu Y.\langle b \rangle X \vee \langle a \rangle Y$	il existe un chemin d'étiquette $(a^*b)^\omega$

D'une façon générale, si  $L$  est un langage rationnel, on peut exprimer par un  $\mu$ -terme  $\langle L \rangle t$  l'ensemble des sommets depuis lesquels il existe un chemin dont l'étiquette est un mot de  $L$  aboutissant dans un état de  $|t|$  :  $\langle L_1 \cup L_2 \rangle t = \langle L_1 \rangle t \vee \langle L_2 \rangle t$ ,  $\langle L_1 L_2 \rangle t = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle t$ ,  $\langle L^* \rangle t = \mu X.t \vee \langle L \rangle X$ .

<sup>2</sup>Des techniques moins primaires permettent d'obtenir un calcul en temps  $O(f \times g)$ .

Et on peut exprimer par un  $\mu$ -terme  $\langle L^\omega \rangle$  l'ensemble des sommets depuis lesquels il existe un chemin (infini) dont l'étiquette est un mot de  $L^\omega$  :  $\langle L^\omega \rangle = \nu X.\langle L \rangle X$ .

Comme tout langage  $\omega$ -rationnel  $L$  est une union finie de  $L_1 L_2^\omega$  où  $L_1$  et  $L_2$  sont des langages rationnels, en définitive, on peut exprimer comme un  $\mu$ -terme l'ensemble des sommets depuis lesquels il existe un chemin (infini) dont l'étiquette est un mot de  $L$  ; et ce  $\mu$ -terme comporte au plus une alternance  $\nu$ - $\mu$ .

## 4 $\mu$ -calcul et jeux de parité

### 4.1 Rappels sur les jeux de parité

Un **jeu de parité** à deux joueurs  $J_0$  et  $J_1$  est défini par un graphe orienté fini  $(V, E)$ , une partition  $(V_0, V_1)$  de  $V$  en positions de  $J_0$  et positions de  $J_1$ , et une coloration finie des sommets.

Le jeu consiste à se déplacer dans le graphe à partir d'une position initiale  $s_0$  : à chaque coup, le joueur auquel appartient la position choisit un successeur. Si un joueur est bloqué dans une position sans successeur, son adversaire est déclaré gagnant. Sinon, la partie dure indéfiniment : dans la suite des couleurs des sommets du chemin correspondant, certaines apparaissent infiniment souvent ; la partie est gagnée par  $J_0$  si la plus grande de ces couleurs est paire, et gagnée par  $J_1$  dans le cas contraire.

Une **stratégie positionnelle**, pour un joueur  $J_i$ , est une fonction partielle  $\sigma : V_i \rightarrow V$  qui à un sommet  $v \in V_i$  associe un successeur  $\sigma(v)$  de  $v$  (le coup que joue  $J_i$  dans la position  $v$ ). La stratégie est **gagnante** pour  $J_i$  si toute partie jouée suivant cette stratégie est gagnée par  $J_i$ .

### 4.2 Stratégies positionnelles et points fixes

Soit  $G_0$  l'ensemble des sommets depuis lesquels le joueur  $J_0$  a une stratégie positionnelle gagnante.

Soit  $v \in G_0$ , et soit  $\sigma$  une stratégie gagnante pour  $J_0$  depuis le sommet  $v$  :

- soit  $v \in V_0$ , et la stratégie  $\sigma$  est également gagnante depuis  $\sigma(v)$ , qui est un successeur de  $v$  ;
- soit  $v \in V_1$ , et la stratégie  $\sigma$  est également gagnante depuis tout successeur  $v'$  de  $v$ .

Par conséquent,  $G_0 \subseteq (V_0 \cap \text{Pred}(G_0)) \cup (V_1 \cap \widetilde{\text{Pred}}(G_0))$ .

Réciproquement, soit  $v \in (V_0 \cap \text{Pred}(G_0)) \cup (V_1 \cap \widetilde{\text{Pred}}(G_0))$  :

- soit  $v \in V_0$  : alors  $v$  admet un successeur  $v' \in G_0$ , depuis lequel  $V_0$  admet une stratégie gagnante  $\sigma$ . Ou bien  $\sigma(v)$  est défini, et la stratégie  $\sigma$  est gagnante pour  $J_0$  depuis  $v$  ; ou bien  $\sigma(v)$  n'est pas défini, et la stratégie  $\sigma'$  définie par  $\sigma'(v) = v'$  et  $\sigma'(w) = \sigma(w)$  si  $w \neq v$  est gagnante pour  $J_0$ .  $J_0$  admet donc une stratégie gagnante depuis  $v$  ;
- soit  $v \in V_1$ , et soient  $v'_1, v'_2, \dots, v'_k$  les successeurs de  $v$ . Depuis chacun des  $v'_i$ ,  $J_0$  admet une stratégie gagnante  $\sigma_i$ . On peut combiner ces stratégies en posant  $\sigma'_1 = \sigma_1$  et, pour  $1 \leq i < k$  :

$$\sigma'_{i+1}(w) = \begin{cases} \sigma'_i(w) & \text{si } \sigma'_i(w) \text{ est défini} \\ \sigma_{i+1}(w) & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction,  $\sigma'_k$  est une stratégie gagnante depuis  $v$ .

En définitive,  $G_0 = (V_0 \cap \text{Pred}(G_0)) \cup (V_1 \cap \widetilde{\text{Pred}}(G_0))$  :  $G_0$  est donc un point fixe de la fonction  $X \rightarrow (V_0 \cap \text{Pred}(X)) \cup (V_1 \cap \widetilde{\text{Pred}}(X))$ .

### 4.3 $\mu$ -termes associés aux positions gagnantes

On utilisera les  $\mu$ -termes atomiques  $p_0$  et  $p_1$  (s'interprétant respectivement, dans un jeu de parité, comme  $V_0$  et  $V_1$  : on a ainsi  $p_1 \equiv \neg p_0$  et  $p_0 \vee p_1 \equiv \top$ ), et  $c_i$ , pour  $i \geq 0$  (s'interprétant, dans un jeu de parité, comme l'ensemble des sommets de couleur  $i$ ).

On pose

$$\begin{aligned} t_0(X) &= (p_0 \wedge \langle \rangle X) \vee (p_1 \wedge [] X) \\ t_1(X) &= (p_1 \wedge \langle \rangle X) \vee (p_0 \wedge [] X) \end{aligned}$$

Les  $\mu$ -termes  $t_0(X)$  et  $t_1(X)$  sont duaux : en effet

$$\begin{aligned} \neg t_0(\neg X) &= \neg((p_0 \wedge \langle \rangle \neg X) \vee (p_1 \wedge [] \neg X)) \\ &\equiv (\neg p_0 \vee \neg \langle \rangle \neg X) \wedge (\neg p_1 \vee \neg [] \neg X) \\ &\equiv (p_1 \vee [] X) \wedge (p_0 \vee \langle \rangle X) \\ &\equiv (p_1 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge \langle \rangle X) \vee (p_0 \wedge [] X) \vee (\langle \rangle X \wedge [] X) \end{aligned}$$

or  $p_1 \wedge p_0 \equiv \perp$ , et l'interprétation de  $\langle \rangle X \wedge [] X \equiv (\langle \rangle X \wedge [] X \wedge p_1) \vee (\langle \rangle X \wedge [] X \wedge p_0)$  est toujours incluse dans celle de  $(p_1 \wedge \langle \rangle X) \vee (p_0 \wedge [] X)$ , donc

$$\neg t_0(\neg X) \equiv (p_1 \wedge \langle \rangle X) \vee (p_0 \wedge [] X) = t_1(X)$$

#### Jeux à une seule couleur

Considérons un jeu de parité à une seule couleur *paire* :  $J_0$  gagne si  $J_1$  est bloqué, ou si la partie est infinie.

Soit  $G_0 = |\nu X.t_0(X)|$ , et soit  $v \in G_0$  : ou bien  $v \in V_1$  et tout successeur de  $v$  est dans  $G_0$ , ou bien  $v \in V_0$ , et  $v$  a au moins un successeur dans  $G_0$ . Par conséquent, depuis tout sommet de  $G_0$ ,  $J_0$  a une stratégie positionnelle gagnante  $\sigma$  (il suffit de choisir, pour tout sommet  $v \in G_0 \cap V_0$ , un successeur  $\sigma(v) \in G_0$ ).

Le complémentaire de  $G_0$  peut s'exprimer par le  $\mu$ -terme dual  $\mu Y.t_1(Y)$  : on a donc (th. de Knaster-Tarski)

$$G_1 = \bigcup_{n \geq 0} |t_1^n(\perp)|$$

À tout sommet  $v$  de  $G_1$  on associe le plus petit entier  $n_v$  tel que  $v \in |t_1^{n_v+1}(\perp)|$ . Ou bien  $v \in V_0$  et tout successeur  $v'$  de  $v$  est dans  $|t_1^{n_v}(\perp)|$ , ou bien  $v \in V_1$  et on peut choisir dans  $|t_1^{n_v}(\perp)|$  un successeur  $v' = \sigma(v)$  ; comme  $v'$  est dans  $|t_1^{n_v}(\perp)|$ ,  $n_{v'} \leq n_v - 1$ .

Soit  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_p \rightarrow$  une partie commençant dans  $G_1$  et jouée par  $J_1$  suivant la stratégie  $\sigma$  : tous les sommets de la partie sont dans  $G_1$ , et par construction, la suite des entiers  $n_{v_p}$  est strictement décroissante, donc la partie est finie ; et comme  $J_1$  n'est jamais bloqué, la partie est gagnante pour  $J_1$ .

Donc  $J_1$  a une stratégie gagnante positionnelle depuis tout sommet de  $\overline{G_0}$ .

En définitive, l'ensemble des sommets depuis lesquels  $J_0$  a une stratégie gagnante est  $G_0$ .

Dans un jeu à une seule couleur *impaire*,  $J_1$  gagne si  $J_0$  est bloqué, ou si la partie est infinie : par symétrie (en inversant les rôles des deux joueurs), l'ensemble des sommets depuis lesquels  $J_0$  a une stratégie gagnante peut s'exprimer par le  $\mu$ -terme  $\mu X.t_0(X)$ .

## Jeux à 2 couleurs

Considérons un jeu de parité à 2 couleurs 0 et 1 :  $J_1$  gagne si  $J_0$  est bloqué, ou si la partie comporte une infinité de sommets de couleur 1.

Soit  $G_1$  l'ensemble des sommets représentés par le  $\mu$ -terme

$$g_1 = \nu Y.\mu X.(c_1 \wedge t_1(Y)) \vee (c_0 \wedge t_1(X))$$

$G_1$  est un point fixe de la fonction  $Y \rightarrow |\mu X.(c_1 \wedge t_1(Y)) \vee (c_0 \wedge t_1(X))|$ , donc d'après le théorème de Knaster-Tarski

$$G_1 = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\emptyset)$$

où  $f$  désigne l'interprétation fonctionnelle du  $\mu$ -terme  $(c_1 \wedge t_1(g_1)) \vee (c_0 \wedge t_1(X))$ .

Notons que  $f(\emptyset)$  est l'interprétation du  $\mu$ -terme

$$(c_1 \wedge t_1(g_1)) \vee (c_0 \wedge t_0(\perp)) \equiv (c_1 \wedge t_1(g_1)) \vee (c_0 \wedge p_0 \wedge [\perp])$$

À tout sommet  $v \in G_1$  on associe le plus petit entier  $n_v$  tel que  $v \in f^{n_v+1}(\emptyset)$ .

- Si  $n_v = 0$ ,  $v \in f(\emptyset)$ . Si  $v$  est une position du joueur  $J_1$ ,  $v$  est nécessairement de couleur 1 et on peut choisir un successeur  $\sigma(v)$  de  $v$  dans  $G_1$ . Si  $v$  est une position du joueur  $J_0$ , ou bien  $v$  est de couleur 0 et n'admet aucun successeur, ou bien  $v$  est de couleur 1 et tous ses successeurs sont dans  $G_1$ .
- Si  $n_v > 0$ , ou bien  $v$  est une position du joueur  $J_1$  et on peut choisir un successeur  $\sigma(v)$  de  $v$  dans  $f^{n_v}(\emptyset)$ , ou bien  $v$  est une position du joueur  $J_0$  et tous ses successeurs sont dans  $f^{n_v}(\emptyset)$ .

Soit  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_p \rightarrow$  une partie commençant dans  $G_1$  et jouée par  $J_1$  suivant la stratégie  $\sigma$  :  $J_1$  n'est jamais bloqué, donc il gagne si la partie est finie. Si la partie est infinie, elle comporte une infinité de sommets de couleur 1 (sans cela, la suite des  $n_{v_p}$  serait strictement décroissante).

En définitive,  $J_1$  a une stratégie positionnelle gagnante depuis tout sommet de  $G_1$ .

Réciproquement, le complémentaire  $G_0$  de  $G_1$  peut s'exprimer par le  $\mu$ -terme dual

$$\mu X.\nu Y.(c_1 \wedge t_0(X)) \vee (c_0 \wedge t_0(Y))$$



et  $G_0 = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\emptyset)$ , où  $f$  désigne l'interprétation fonctionnelle du  $\mu$ -terme

$$\nu Y.(c_1 \wedge t_0(X)) \vee (c_0 \wedge t_0(Y))$$

À tout sommet  $v \in G_0$  on associe le plus petit entier  $n_v$  tel que  $v \in f^{n_v+1}(\emptyset)$ .

- Si  $n_v = 0$ ,  $v \in f(\emptyset) = |\nu Y.(c_1 \wedge t_0(\perp)) \vee (c_0 \wedge t_0(Y))| = |\nu Y.(c_1 \wedge p_1 \wedge [\perp]) \vee (c_0 \wedge t_0(Y))|$ .  
Si  $v$  est une position du joueur  $J_0$ ,  $v$  est nécessairement de couleur 0 et on peut choisir un successeur  $\sigma(v)$  de  $v$  dans  $f(\emptyset)$ . Si  $v$  est une position du joueur  $J_1$ , ou bien  $v$  est de couleur 1 et n'admet aucun successeur, ou bien  $v$  est de couleur 0 et tous ses successeurs sont dans  $f(\emptyset)$ .
- Si  $n_v > 0$ , ou bien  $v$  est une position du joueur  $J_0$  et on peut choisir un successeur  $\sigma(v)$  de  $v$  dans  $f^{n_v}(\emptyset)$ , ou bien  $v$  est une position du joueur  $J_1$  et tous ses successeurs sont dans  $f^{n_v}(\emptyset)$ .

Soit  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_p \rightarrow$  une partie commençant dans  $G_0$  et jouée par  $J_0$  suivant la stratégie  $\sigma : J_0$  n'est jamais bloqué, donc il gagne si la partie est finie. Si la partie est infinie, la suite des  $n_{v_p}$  est décroissante, et si  $v_p$  est de couleur 1 on a  $n_{v_{p+1}} < n_{v_p}$  : il ne peut donc y avoir qu'un nombre fini de sommets de couleur 1, et là encore  $J_0$  est gagnant.

En définitive,  $J_0$  a une stratégie positionnelle gagnante depuis tout sommet de  $G_0$ .

### Cas général

Le raisonnement se généralise à tout jeu de parité : si toutes les couleurs sont  $\leq 2k$ , les positions depuis lesquelles  $J_0$  a une stratégie gagnante s'expriment par le  $\mu$ -terme

$$\nu X_{2k} \cdot \mu X_{2k-1} \cdots \mu X_1 \cdot \nu X_0 \cdot \bigvee_{0 \leq i \leq 2k} (c_i \wedge t_0(X_i))$$

et on peut calculer une stratégie positionnelle gagnante sur le même principe que ci-dessus (en exprimant les plus petits points fixes comme des limites de suites croissantes).