

**1. Automates de Büchi.** Soit  $A$  l'alphabet  $\{a, b\}$  et  $\Sigma$  un alphabet fini quelconque. Soit  $\mathcal{A}$  un automata fini  $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, i, F, \Delta)$  avec  $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ . On note  $\mathcal{L}_+(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma^*$  le langage rationnel reconnu par  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma^\omega$  le langage de mots infinis reconnu par  $\mathcal{A}$ . Pour un mot  $u \in \Sigma^\omega$  on note  $\text{inf}(u)$  l'ensemble des lettres qui apparaissent infiniment souvent dans  $u$ .

- (1) Donner des automates de Büchi qui reconnaissent les langages  $A^+b^\omega$ ,  $\{u \in \{a, b, c, d\}^\omega \mid \text{inf}(u) = \{a, b\}\}$ ,  $\{u \in \{a, b, c, d\}^\omega \mid \text{inf}(u) = \{a, b\} \text{ ou } \text{inf}(u) = \{c, d\}\}$ .
- (2) Soit  $\mathcal{A}$  un automate et  $L = \mathcal{L}_+(\mathcal{A})$ . Construire un automate qui reconnaît le langage de mots infinis  $L^\omega$ .

**2. Langages déterministes.** Si  $L \subseteq \Sigma^+$  est un langage de mots finis, on appelle limite du langage  $L$  le langage de mots infinis

$$\overrightarrow{L} = \{u \in \Sigma^\omega \mid u(1)u(2)\dots u(n) \in L \text{ pour une infinité d'entiers } n\} .$$

- (1) Etant donnés deux automates déterministes  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ , construire des automates déterministes qui reconnaissent les langages  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}_2)$ , et  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}_2)$
- (2) Montrer que  $\overrightarrow{A^+b}$  est l'ensemble des mots  $u \in A^\omega$  tel que  $b \in \text{inf}(u)$ .
- (3) Calculer  $\overrightarrow{A^+}$  et  $\overrightarrow{a^+b}$ .
- (4) Montrer que le langage  $A^+a^\omega$  n'est pas la limite d'un langage de mots finis.
- (5) L'ensemble  $\{\overrightarrow{L} \mid L \subseteq \Sigma^+\}$  des limites de langages de mots finis est-il stable par union ? par complémentaire ?
- (6) Soit  $\mathcal{A}$  un automate déterministe. Montrer que  $\mathcal{L}_\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{\mathcal{L}_+(\mathcal{A})}$ . Cette égalité est-elle toujours vérifiée si  $\mathcal{A}$  n'est pas déterministe ?
- (7) Montrer que l'ensemble  $\{\overrightarrow{L} \mid \text{il existe } \mathcal{A}, L = \mathcal{L}_+(\mathcal{A})\}$  est stable par union, par intersection mais pas par complémentaire.
- (8) L'ensemble  $\{\overrightarrow{L} \mid L \subseteq \Sigma^+\}$  des limites de langages de mots finis est-il stable par intersection ?

**Jeux de Büchi** On fixe  $G = (V, V_0, V_1, E)$  un graphe de jeu et  $T \subset V$  un ensemble de sommets cibles. Le jeu d'attraction est le jeu dont la condition de victoire est  $W = V^*TV^\omega$ . Le jeu d'attraction en plus d'un tour est le jeu dont la condition de victoire est  $W = VV^*TV^\omega$ . Le jeu de Büchi est le jeu dont la condition de victoire est  $W = (V^*T)^\omega$ . Pour un ensemble  $W \subseteq V$ , on note

$$\text{Pre}_+(W) = \{v \in V_0 \mid \exists w \in W, (v, w) \in E\} \cup \{v \in V_1 \mid \forall (v, w) \in E, w \in W\} .$$

et

$$\text{Pre}(W) = W \cup \text{Pre}_+(W) .$$

- (1) Pour  $U \subseteq V$ , montrez qu'il existe un plus petit sous-ensemble de  $V$  clos par l'opérateur Pre et qui contient  $U$ . On note  $\text{Acc}(U)$  cet ensemble.
- (2) Montrer que l'ensemble des sommets gagnants au jeu d'attraction pour le joueur 0 est  $\text{Acc}(T)$ .
- (3) Montrer que le joueur 0 a une stratégie gagnante au jeu d'attraction qui est positionnelle c'est à dire qui a la propriété  $\sigma(v_0 \dots v_n) = \sigma(v_n)$ .
- (4) Montrer la même chose pour le joueur 1.
- (5) Montrez que si le joueur 0 a une stratégie pour passer au moins  $|T|$  fois par  $T$  à partir d'un sommet  $v$  alors il a une stratégie pour gagner le jeu de Büchi à partir de  $v$ .
- (6) Montrer que le joueur 0 a une stratégie gagnante au jeu de Büchi qui est positionnelle c'est à dire qui a la propriété  $\sigma(v_0 \dots v_n) = \sigma(v_n)$ .
- (7) Montrer la même chose pour le joueur 1.