

## Travaux dirigés : Points fixes

### Exercice 1

Soit  $(V, E)$  un graphe orienté. Pour tout ensemble  $X \subset V$  de sommets du graphe, on note  $Succ(X)$  l'ensemble des successeurs des sommets de  $X$ , et  $Pred(X)$  l'ensemble des prédécesseurs des sommets de  $X$ .

1. Montrer que la composante fortement connexe d'un sommet donné  $s_0$  est un point fixe de la fonction  $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  définie par

$$f(X) = \{s_0\} \cup (Succ(X) \cap Pred(X))$$

Est-ce toujours le plus petit ? ou le plus grand ?

2. Le jeu classique de Solitaire peut être modélisé par un graphe orienté sans cycle, dont les sommets représentent les configurations possibles du jeu, et les arcs représentent les coups possibles du joueur.

On note  $G$  l'ensemble des sommets "gagnants" (correspondant aux configurations à une seule boule), et  $P$  l'ensemble des sommets "perdants" (configurations à plus d'une boule dans lesquelles aucun coup n'est possible). Exprimer comme un point fixe l'ensemble des configurations depuis lesquelles le joueur n'a aucune possibilité de gagner.

3. Le "Solitaire" fourni dans les distributions commerciales de certains systèmes d'exploitation est une réussite dans laquelle le joueur a gagné s'il réussit à découvrir toutes les cartes, mais le nombre de cartes couvertes augmente quand il retourne le talon : on peut encore modéliser le jeu par un graphe orienté, mais ce graphe comporte des cycles. On note  $G$  l'ensemble des sommets correspondant aux configurations où toutes les cartes sont découvertes. Exprimer comme un point fixe l'ensemble des configurations depuis lesquelles le joueur est certain de perdre.

### Exercice 2

Soient  $f$  et  $g$  des fonctions croissantes d'un ensemble ordonné complet  $E$  dans lui-même. On suppose que, pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) \leq g(x)$ . Montrer que le plus petit point fixe de  $f$  est inférieur ou égal au plus petit point fixe de  $g$ . A-t-on un résultat analogue pour les plus grands points fixes ?

### Exercice 3

Soient  $E$  et  $F$  des ensembles ordonnés complets.

1. Montrer que  $E \times F$ , muni de l'ordre produit

$$(x, y) \leq (x', y') \iff_{def.} x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

est complet.

2. Montrer qu'une fonction  $f$  de  $E \times F$  dans un ensemble complet  $G$  est continue si et seulement si elle est continue par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes :
  - (a) pour tout  $x \in E$ , la fonction  $g_x : F \rightarrow G$  définie par  $g_x(y) = g(x, y)$  est continue ;
  - (b) pour tout  $y \in F$ , la fonction  $h_y : E \rightarrow G$  définie par  $h_y(x) = h(x, y)$  est continue.
3. Soit  $f$  une fonction continue de  $E \times E$  dans  $E$ . Montrer que la fonction qui à tout  $y \in E$  associe le plus petit point fixe de  $h_y(x) = h(x, y)$  est continue.

### Exercice 4

Soit  $E$  l'ensemble des applications d'un ensemble quelconque  $X$  dans un ensemble ordonné complet  $Y$ .

1. Montrer que  $E$ , muni de l'ordre

$$f \leq g \iff_{def.} \text{ pour tout } x \in X, f(x) \leq g(x)$$

est complet.

2. On suppose à présent que  $X$  est lui aussi un ensemble ordonné complet. Montrer que si  $C$  est un ensemble de fonctions continues de  $X$  dans  $Y$ , la borne supérieure de  $C$  dans  $E$  est aussi une fonction continue.