

MATh.en.JEANS (MeJ)

- « [...] faire vivre les **mathématiques** par les **jeunes**, selon les principes de la **recherche** [...] rencontrer des **chercheurs** et de pratiquer en **milieu scolaire** une authentique **démarche scientifique**, avec ses dimensions aussi bien **théoriques** qu'**appliquées** [...] »

http://www.mathenjeans.fr/mej_quoi

- « faire découvrir aux élèves les **aspects ludiques et merveilleux des mathématiques**, par la **pratique de la recherche** »

<http://www.mathenjeans.fr/association>

Collège

Collège Monséjour
7 rue Chanoine André Lacaze
33200 Bordeaux

Jennifer Jacquet et Rafaela Fernandes

2018-2019

Enseignant – Chercheur

<http://www.labri.fr/perso/guibert/>



Département informatique



Institut **U**niversitaire de **T**echnologie (IUT)

Université de Bordeaux



Laboratoire **B**ordelais de **R**echerche en **I**nformatique
(LaBRI)

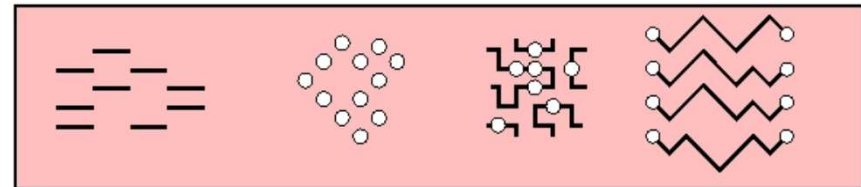
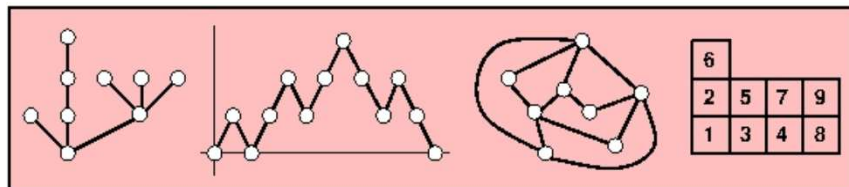
Équipe : *Combinatoire et Algorithmique*

Thème : *Combinatoire Énumérative et Algébrique*

Recherche

<http://www.labri.fr/index.php?n=CombAlgo.CombEnum>

- **Combinatoire** : étude des structures discrètes qui apparaissent en informatique, en mathématiques, etc.
- **Combinatoire énumérative** : quel est le nombre d'objets d'une taille donnée ?



Jeux de *Tafl* : historique

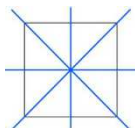
https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeux_de_Tafl

- Plus ancienne trace : IV^e siècle, morceau de tablier (plateau, *tafl*) découvert à Wimose (Danemark)
- Jeux délaissés à partir du XII^e siècle (à l'arrivée des échecs)
- Les plus connus : *Tablut*, *Hnefatafl* (la table du roi) et sa version moderne « le jeu des Vikings », *Ard-ri*, *Alea Evangelii*, *Brandub*
- On ne sait pas qui des Scandinaves ou des Britanniques l'ont transmis à l'autre



- Jeu de stratégie combinatoire abstrait : deux joueurs s'opposent et jouent à tour de rôle, tous les éléments sont connus, le hasard n'intervient pas
- Règles exactes non retrouvées mais reconstituées

Jeux de *Tafl* : caractéristiques

- Un tablier de jeu carré de côté impair
- Placement initial symétrique 
- Deux camps (forces inégales, objectifs différents) :



- Défenseurs :

- Un roi et sa garde de guerriers
- Doivent amener le roi dans l'une des forteresses de coin




- Assaillants :

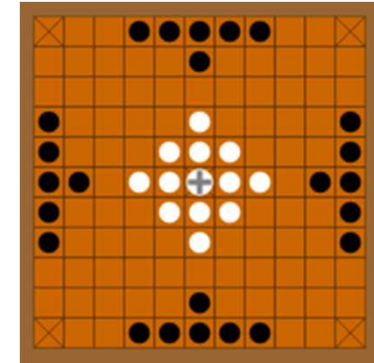
- Des guerriers, deux fois plus nombreux
- Doivent capturer le roi
- Commencent la partie




- Déplacement orthogonal vers un emplacement libre
- Capture par encerclement

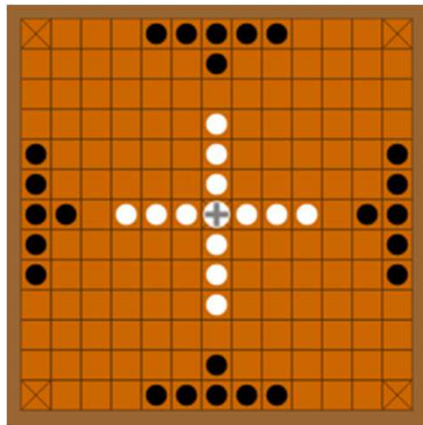
Jeux de *Tafl* : placements initiaux

<i>Nom</i>	tablier	
<i>Hnefatafl</i>	11×11	12
<i>Hnefatafl</i>	13×13	12
<i>Tawl-bwrdd</i>	11×11	12
<i>Alea evangelii</i>	19×19	24
<i>Ard-Ri</i>	7×7	8
<i>Tablut</i>	9×9	8

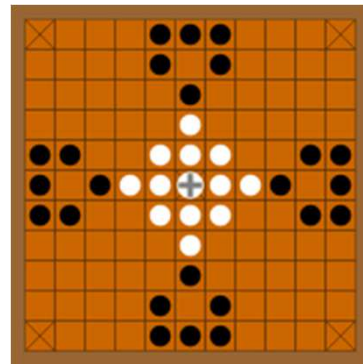
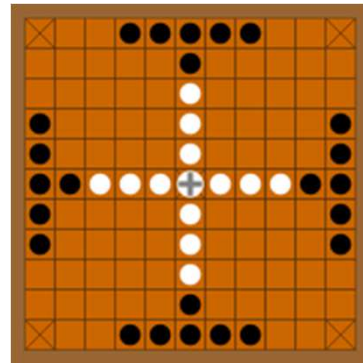


-  4 forteresses de coin
-  1 forteresse centrale où est placé initialement le roi

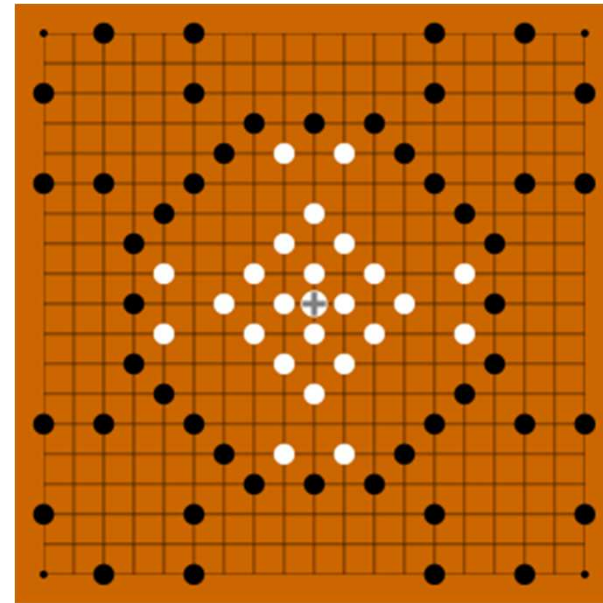
Jeux de *Tafl* : placements initiaux



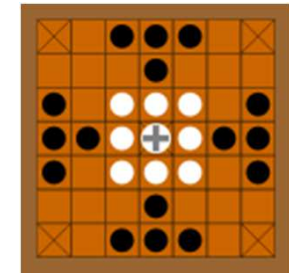
Hnefatafl



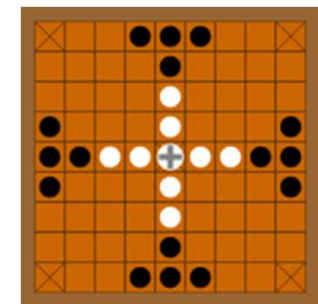
Tawl-bwrdd



Alea evangelii



Ard-Ri



Tablut

Jeu des Vikings : webographie

- <https://boardgamegeek.com/boardgame/2932/hnefatafl>
- <http://www.trictrac.net/jeu-de-societe/hnefatafl/infos>
- http://aagenielsen.dk/hnefatafl_online.php
- <https://www.facebook.com/worldtaflfederation> World Tafl Federation Championship





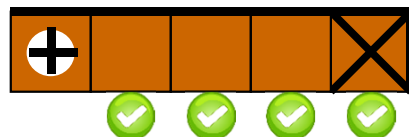
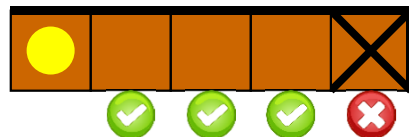
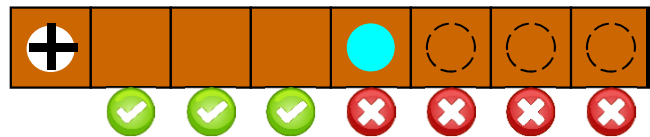
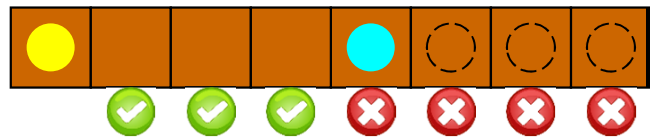
Jeu des Vikings



- Contexte
 - Le but du jeu est de prendre le roi prisonnier. La garde royale lutte contre les assaillants. Les assaillants sont majoritaires. Conséquemment, le roi est forcé de s'enfuir.
- Matériel
 - Le jeu est composé d'un tablier de 11x11.
 - Les défenseurs possèdent un roi et 12 guerriers ; les assaillants possèdent 24 guerriers.
- Placement initial
 - Le roi est placé au centre du tablier, entouré de sa garde royale. Les assaillants sont disposés sur les 4 bords du tablier.
 - Les assaillants commencent par bouger un de leurs guerriers, et l'on continue en alternance.
- Déplacement
 - Les pions (roi et guerriers) peuvent se déplacer horizontalement et verticalement d'autant de cases que voulu, sans sauter par dessus un autre pion ni occuper sa case.
 - Les guerriers peuvent traverser la forteresse centrale, mais sans s'y arrêter.
 - Seul le roi peut occuper une forteresse (centrale ou de coin).
- Capture
 - La capture d'un guerrier se fait en l'encerclant horizontalement ou verticalement avec un pion adverse de chaque côté. Le roi est capturé en l'encerclant entièrement (horizontalement et verticalement), avec éventuellement des guerriers de sa garde.
 - Les forteresses (centrale et de coin) comptent comme un pion pour la capture.
- Fin de partie
 - Les assaillants ont gagné si le roi est entouré d'assaillants.
 - Les défenseurs ont gagné si le roi arrive à s'enfuir dans l'une de ses 4 forteresses de coin.

Jeu des Vikings : déplacement

D'un pion dans les 4 directions (ex. : → à droite) :



Légende :

● guerrier à déplacer

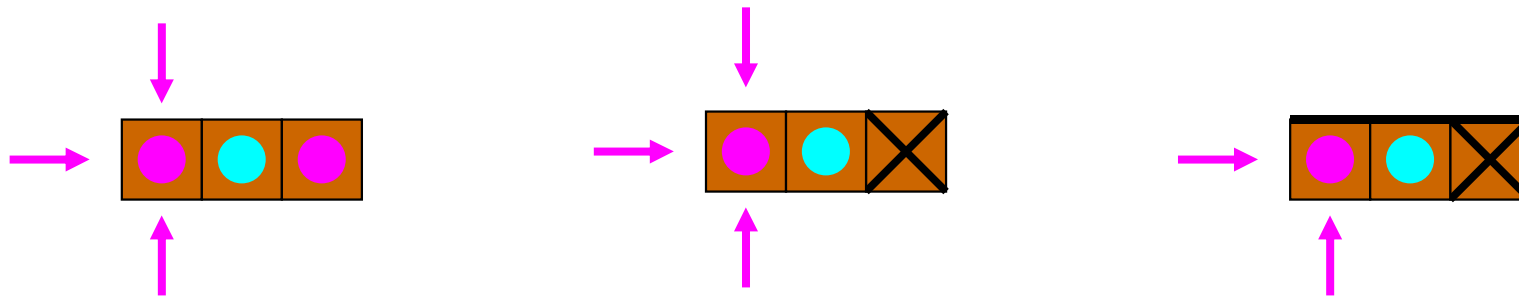
⊕ roi à déplacer

● pion, du même camp ou non

■ case non occupée

○ case occupée ou non

Jeu des Vikings : capture d'un guerrier

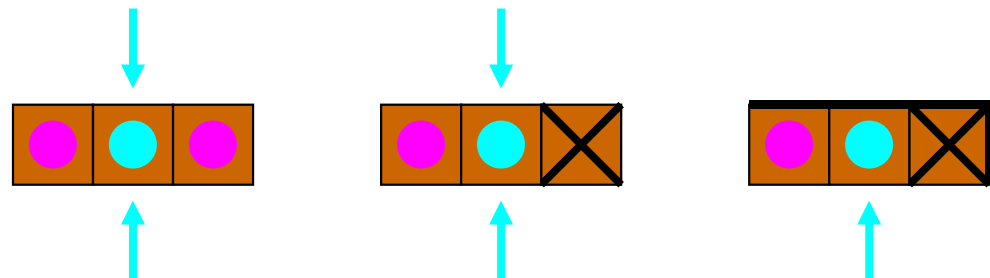


Légende :

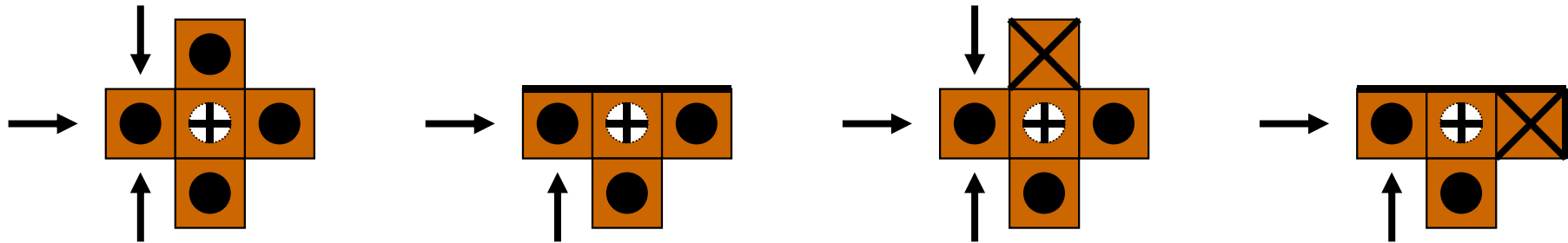
- pions capturant suite au déplacement de l'un d'eux
- guerrier adverse capturé

Plusieurs guerriers peuvent être capturés simultanément.

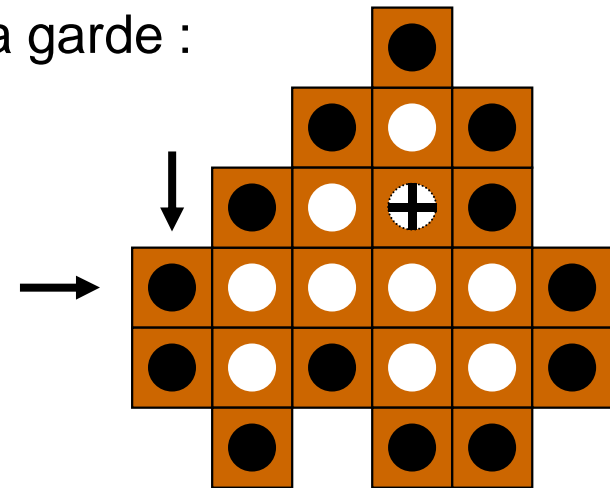
Pas de capture lorsque :



Jeu des Vikings : capture du roi



Exemple de capture du roi et de guerriers de sa garde :

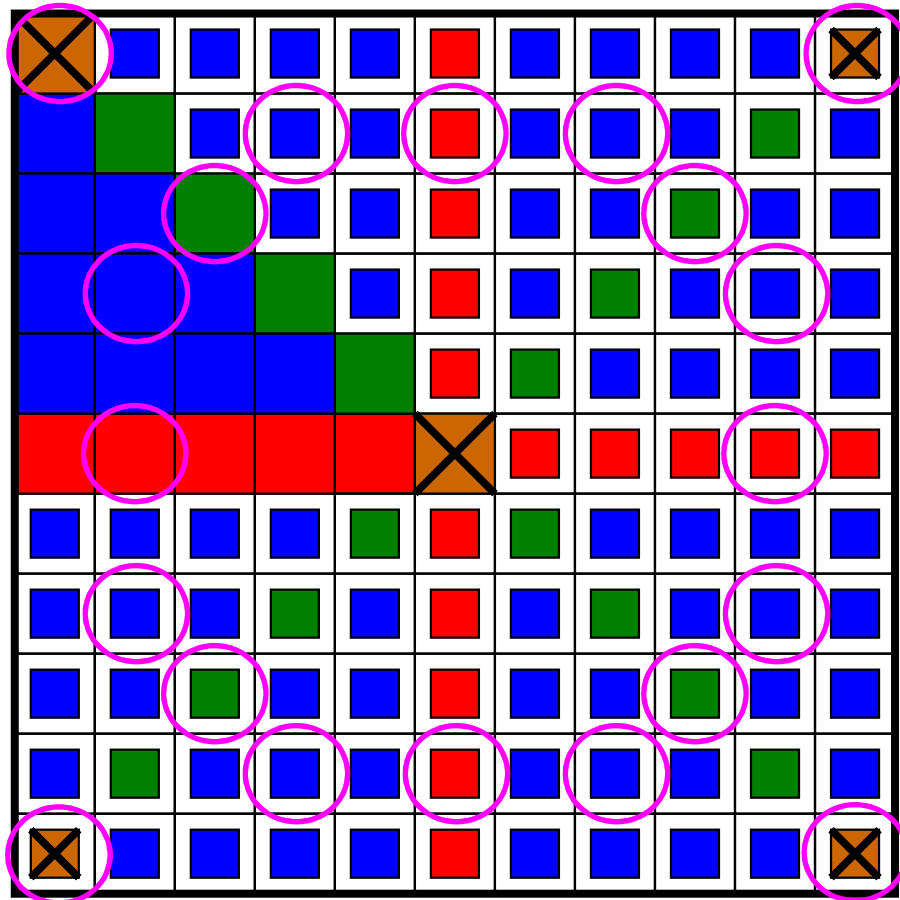
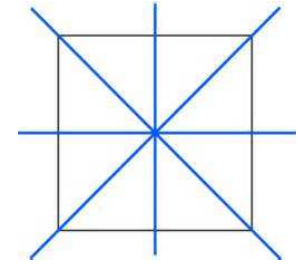


Légende :

● assaillants capturant le roi suite au déplacement de l'un d'eux

⊕ roi capturé

Symétries du tablier



$$(2k+1) \times (2k+1) =$$

$$\text{X} \quad 1+4$$

$$\text{Red} \quad 4k$$

$$\text{Green} \quad 4(k-1)$$

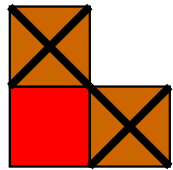
$$\text{Blue} \quad 8k(k-1)/2$$

avec $k \in \mathbb{N}$

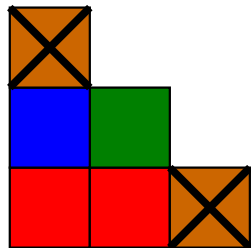
k	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5
	0	1	2	3	4
	0	1	3	6	10

Nombre de placements initiaux

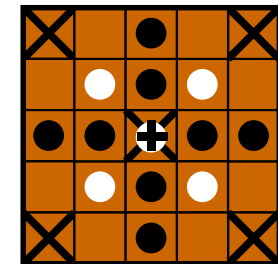
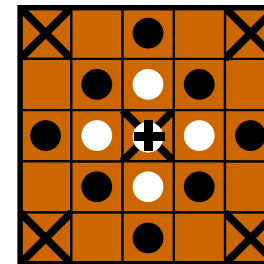
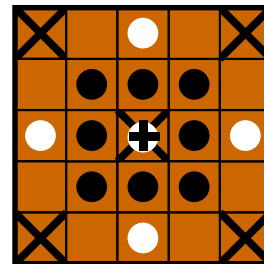
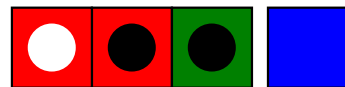
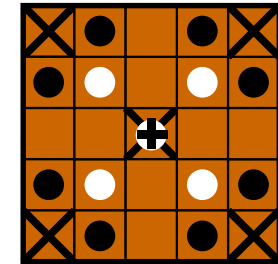
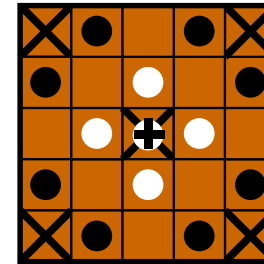
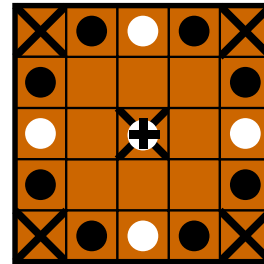
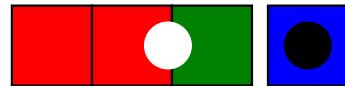
$$1 \leq k \leq 2$$



$k = 1$ (3×3) : aucune possibilité

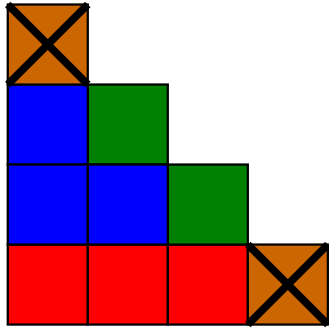


$k = 2$ (5×5) : 6 possibilités



Nombre de placements initiaux

$k = 3$ (7×7) : 403 possibilités

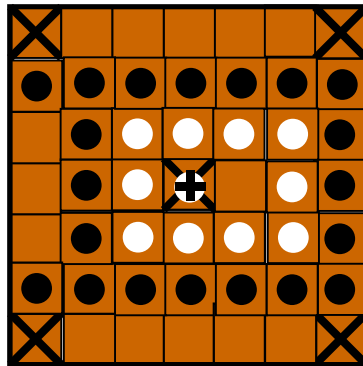


		$3 = 1 * 3$
		$60 = 10 * 6$
		$15 = 5 * 3$
		$15 = 5 * 3$
		$30 = 30 * 1$
		$90 = 30 * 3$
		$30 = 5 * 6$
		$30 = 10 * 3$
		$90 = 30 * 3$
		$10 = 10 * 1$
		$30 = 10 * 3$

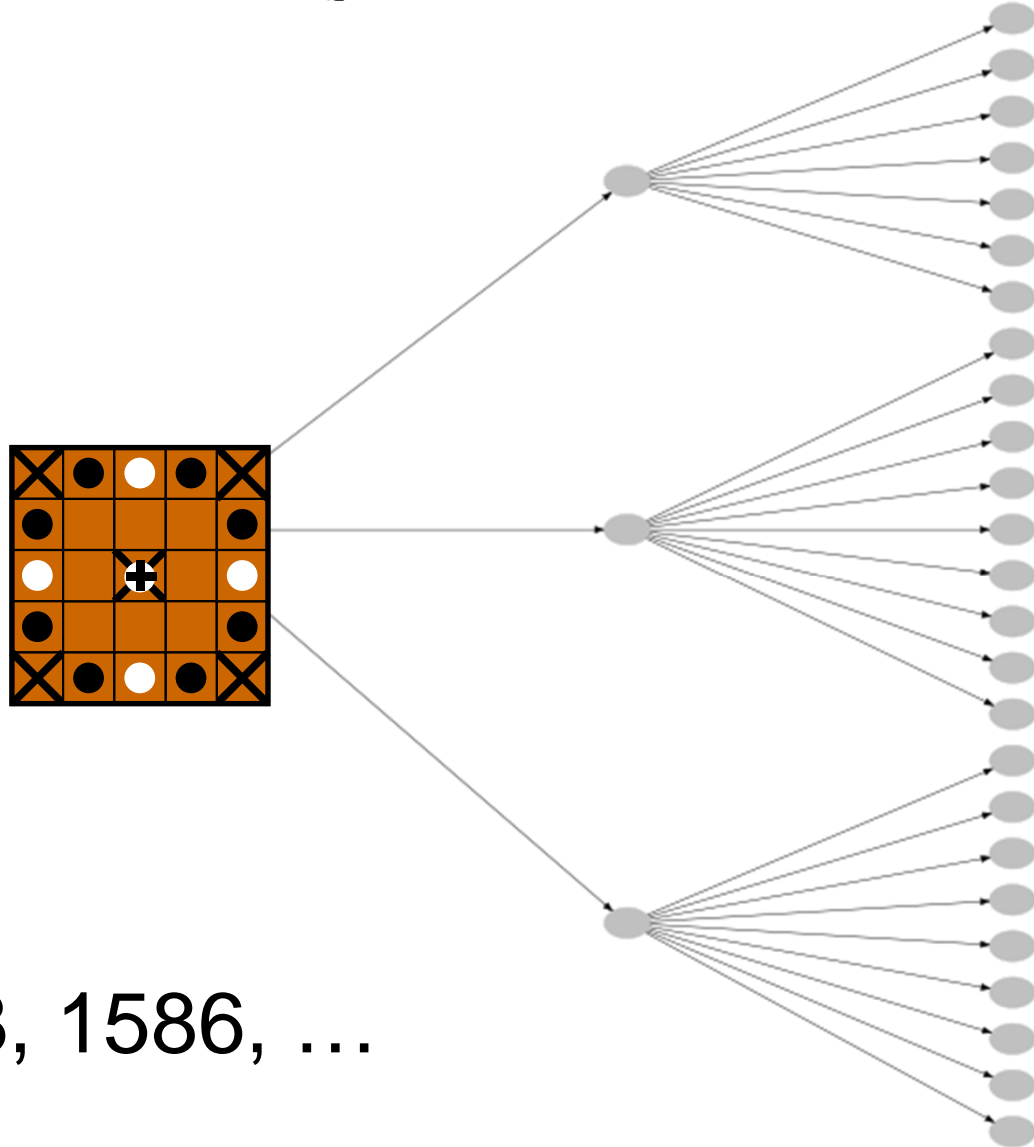
Problème n° 1

Quelle stratégie doit élaborer chaque camp pour gagner à coup sûr ou forcer la partie nulle ?

- Pour l'une, plusieurs ou chacune des 6 possibilités des placements initiaux pour $k = 2$ (5×5)
- ~~– Pour l'une ou certaines des 403 possibilités des placements initiaux pour $k = 3$ (7×7)~~



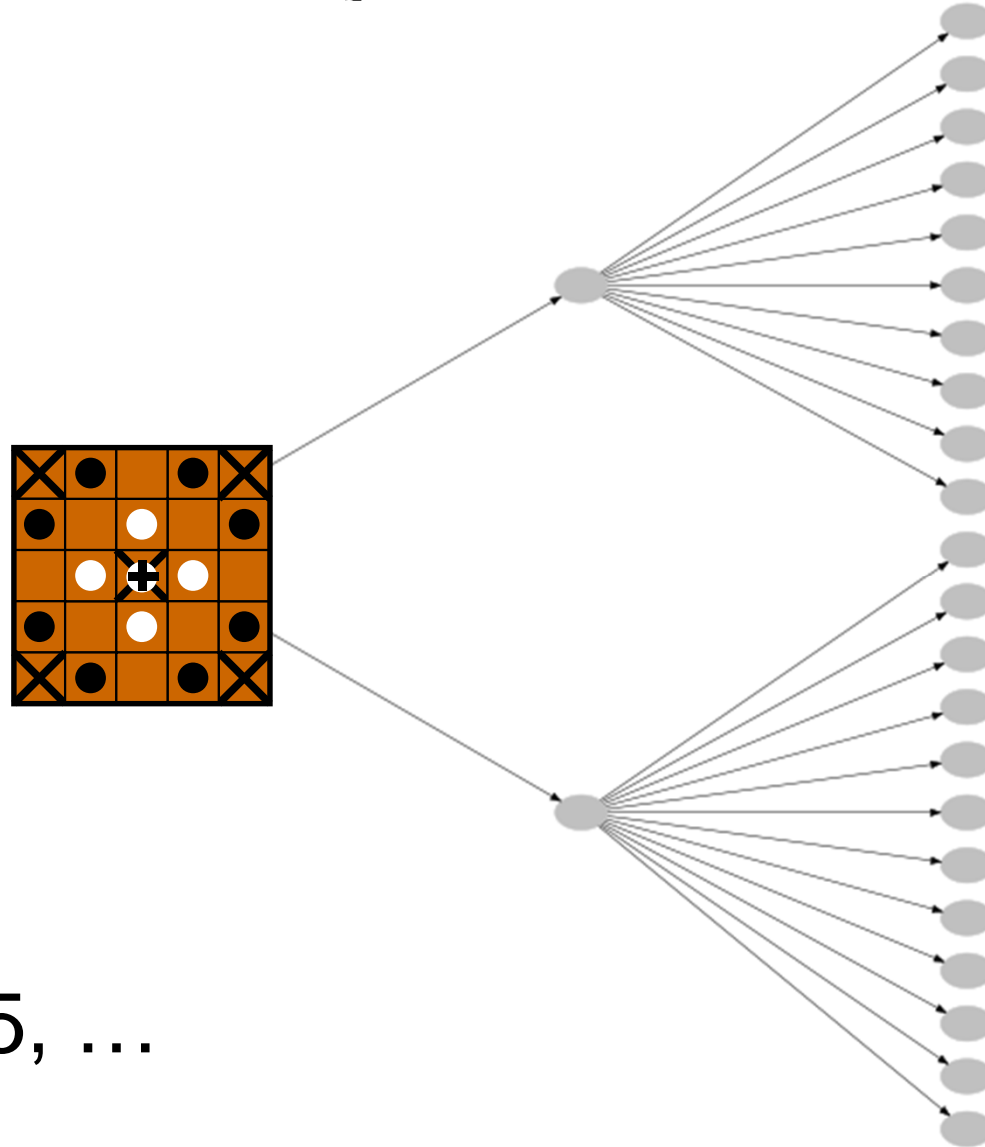
Arbres des possibilités (une fois les symétries éliminées)



1, 3, 25, 308, 1586, ...

Arbres des possibilités

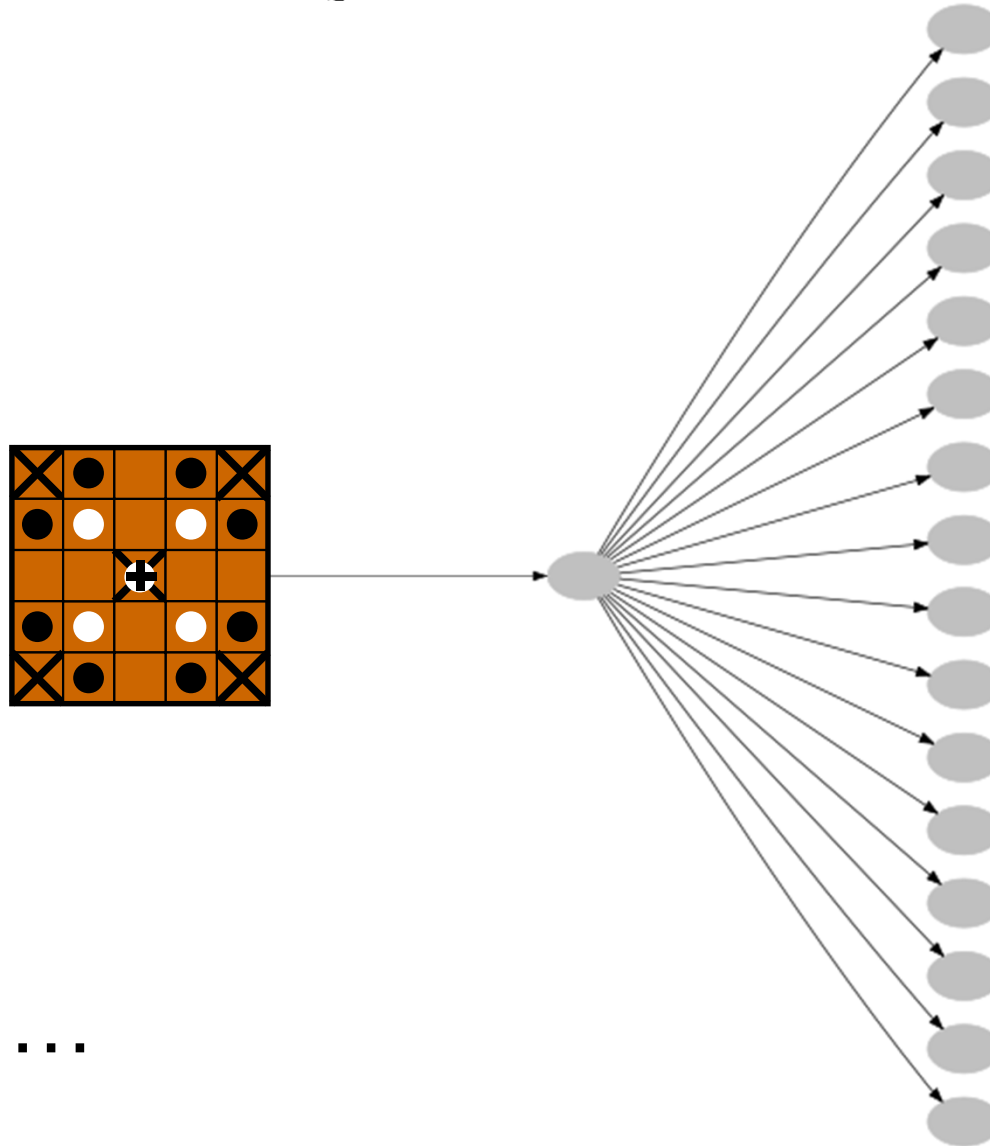
(une fois les symétries éliminées)



1, 2, 22, 185, ...

Arbres des possibilités

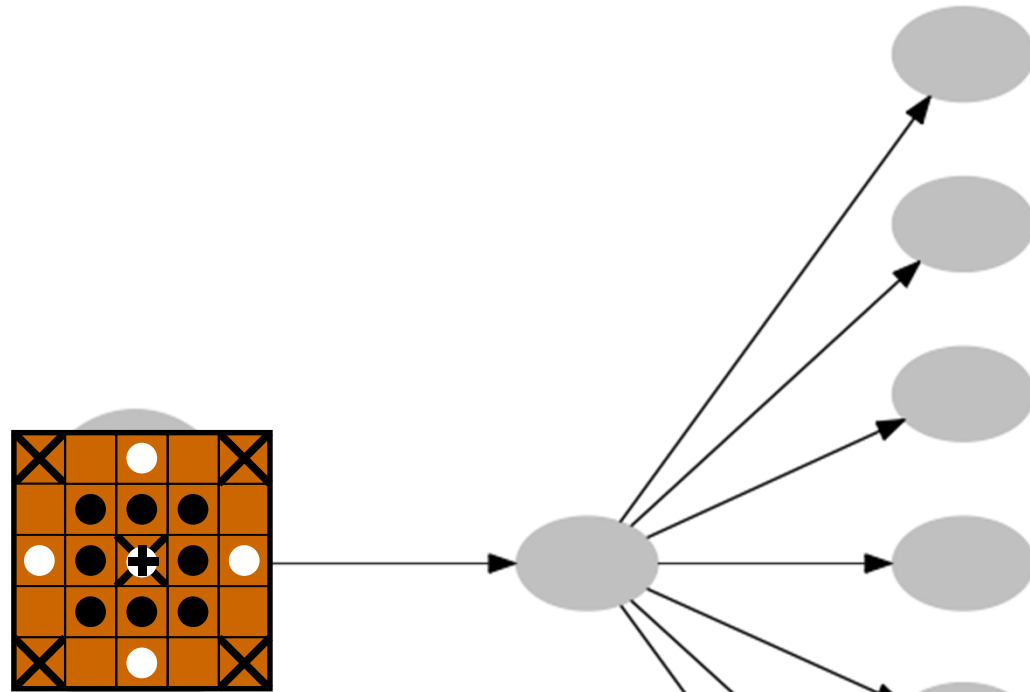
(une fois les symétries éliminées)



1, 1, 16, 98, ...

Arbres des possibilités

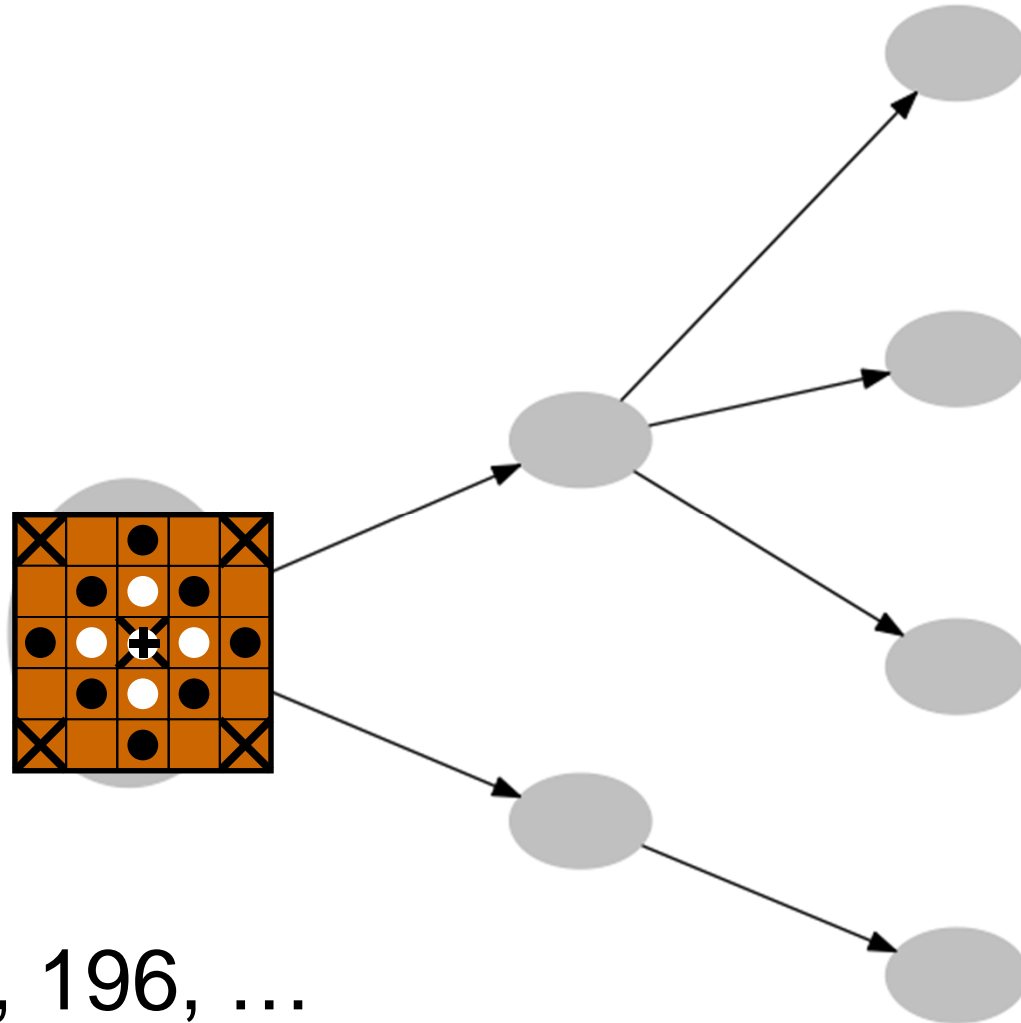
(une fois les symétries éliminées)



1, 1, 7, 44, 229, 1247 (157 ● et 0 ○), ...

Arbres des possibilités

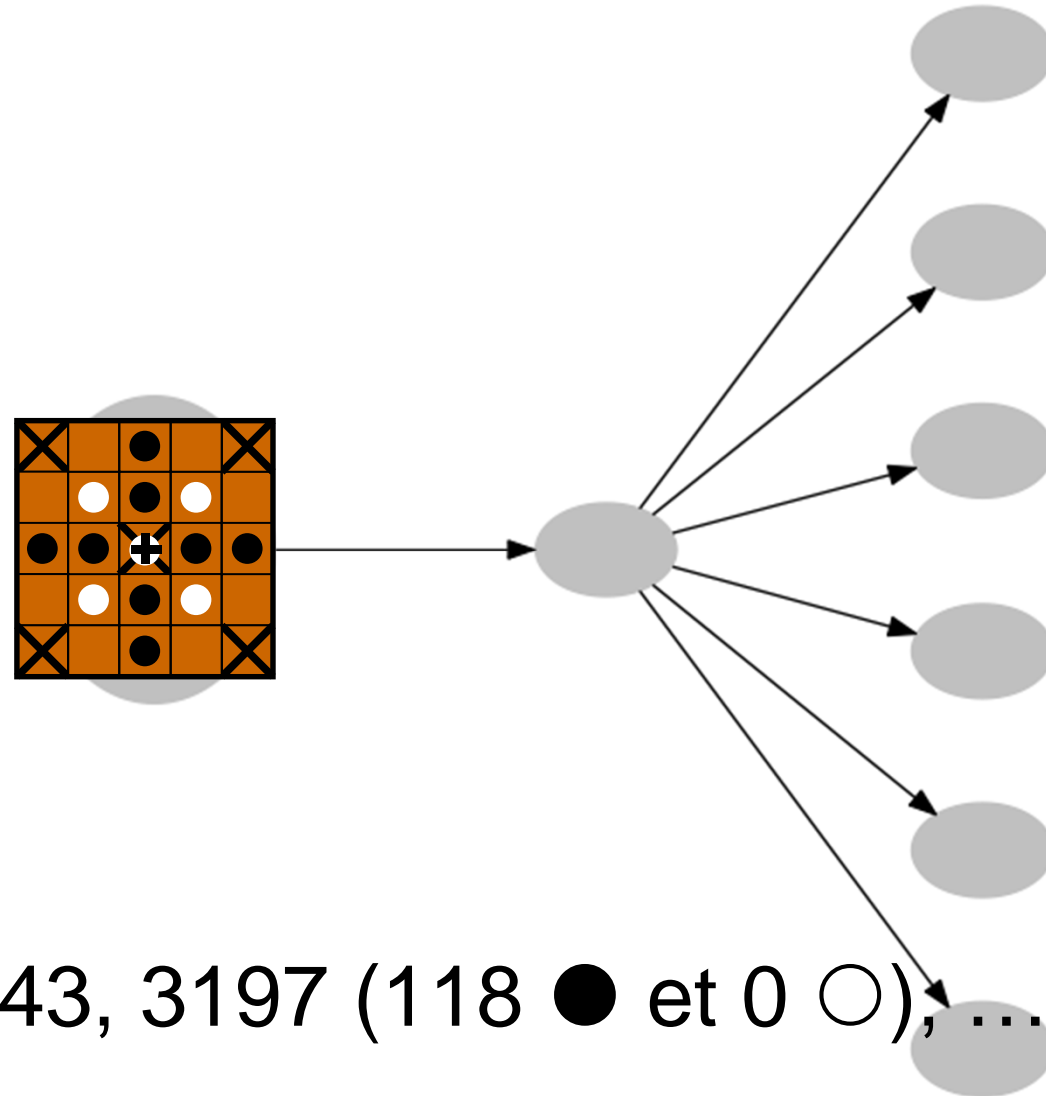
(une fois les symétries éliminées)



1, 2, 4, 54, 196, ...

Arbres des possibilités

(une fois les symétries éliminées)



1, 1, 6, 75, 343, 3197 (118 ● et 0 ○), ...

Problème n° 2

Faire un programme qui calcule le nombre de placements initiaux possibles (en respectant les symétries) de tabliers $(2k+1) \times (2k+1)$.

$$\sum_{n_1+b_1+v_1=k+(k-1)} \binom{k+(k-1)}{n_1, b_1, v_1} \sum_{n_2+b_2+v_2=k(k-1)/2} \binom{k(k-1)/2}{n_2, b_2, v_2}$$

avec

$$n_1, b_1, v_1, n_2, b_2, v_2 \in \mathbb{N}$$

nb. pièces noires et blanches, cases vides

$$(4 n_1 + 8 n_2) = 2 (4 b_1 + 8 b_2)$$

2 fois plus d'attaquants

$$n_1 > 0 \text{ ou } n_2 > 0 \text{ (c.-à-d. } b_1 > 0 \text{ ou } b_2 > 0)$$

au moins un attaquant

Nombre de placements initiaux (pour k de 1 à 25)

0, 6, 403, 63607, 30201082, 43132751038, 183074292622067, 2292236487038567430,
84257807657815823366033, 9062413286422810112809229717,
2845334772191836133097365459720781, 2603266449496465877066576124551884025489,
6931409082432956706864139775182073997339892607,
53652781367423148968703068773168639600276847106410889,
1206351398918433635486503247995692305735106798870443076826464,
78736914967917360314056046357468724677754389766894794438482355725916,
14909748723100285055949133352918590289031616655594934101749733600584463048599,
81875579443497489761958817092296873270134601673541686263717741178609350280798303959
92,
1303367827357599741739833174106275940759018429785626800584804418809392897629346247
4010317283063,
6012702737701503647466762578916505541566030237887442715028858123298135287945539446
1684630571562467194175,
80360833585683354897819919408079526404336270569351418190603352094419311249670398019
5339347280465448490260807226265,
31109241537573821864949991686008351034824926645994628303896992510161719235497581795
573300826873635212295375395620845362382464,
34875190600029891744662645611600446938508663910952436637895736721061026291166353450
88173127101000347498459320685037431438464602190258062,
11320068985526662914670098022551263261074035628150740757325325657422308322639785999
31887322065877598809309211046636572921953354986210244153278055728,
10637006615090453244846667661762112211190929696805881956541992941344751715675727301
99532437211755148737395426164570479039300750742708724954389229177611067388430

Problème n° 3

Peut-on trouver une succession de déplacements valides (la capture est obligatoire) permettant de passer d'un placement initial possible 5x5 vers un autre ?

