

MATh.en.JEANS (MeJ)

« [...] faire vivre les **mathématiques** par les **jeunes**, selon les principes de la **recherche** [...] rencontrer des **chercheurs** et de pratiquer en **milieu scolaire** une authentique **démarche scientifique**, avec ses dimensions aussi bien **théoriques** qu'**appliquées** [...] »

[http://www.mathenjeans.fr/mej_quoi]

« faire découvrir aux élèves les **aspects ludiques et merveilleux des mathématiques**, par la **pratique de la recherche** »

[<http://www.mathenjeans.fr/association>]

Jumelage de deux collèges

Collège Gérard Philipe
38 Avenue Pierre Corneille
33600 Pessac

[<http://webetab.ac-bordeaux.fr/college-gerard-philipe-pessac>]

François Petit



Collège Aliénor d'Aquitaine
16 Rue du Domaine Devienne
33800 Bordeaux

[<http://www.alienor-bordeaux.fr>]

Josianne Lorblanché et Marin Dubroca-Voisin

Enseignant – Chercheur

[<http://www.labri.fr/perso/guibert/>]



Département informatique
de l'Institut **U**niversitaire de **T**echnologie (IUT)
de l'université Bordeaux 1



Laboratoire **B**ordelais de **R**echerche en
Informatique (LaBRI)

Équipe : *Combinatoire et Algorithmique*

Thème : *Combinatoire Énumérative et Algébrique*

Recherche

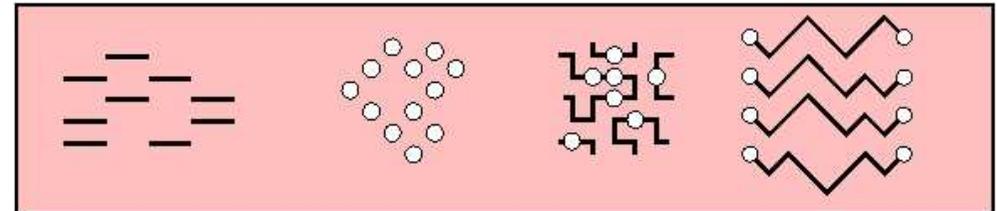
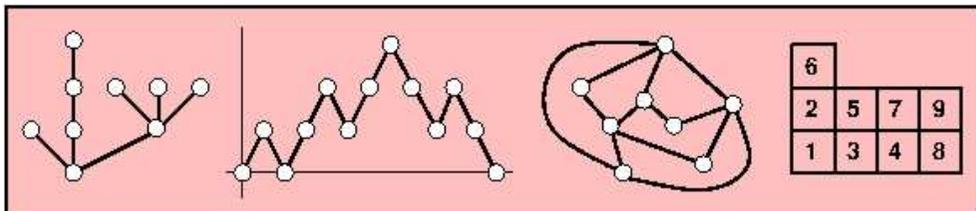
[<http://www.labri.fr/index.php?n=CombAlgo.CombEnum>]

Combinatoire :

étude des structures discrètes qui apparaissent en informatique, en mathématiques, etc.

Combinatoire énumérative :

quel est le nombre d'objets d'une taille donnée ?



Tzaar



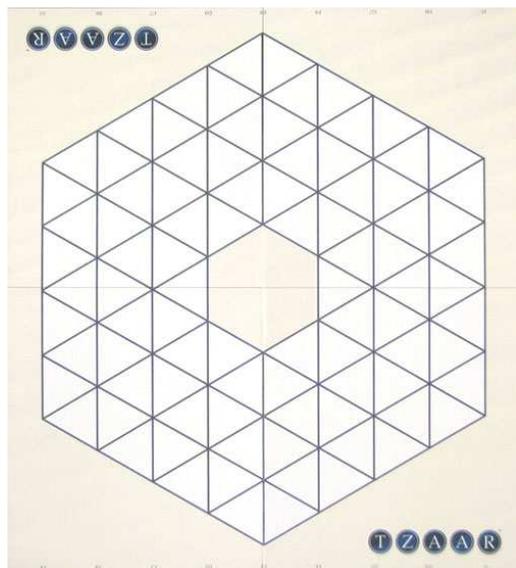
[TricTrac, JeuxSoc, LudiGaume, ...]

- Kris Burm
- 2007
- ≥ 8 ans
- ≤ 30 minutes
- Jeu de stratégie combinatoire abstrait =
 - deux joueurs (Blancs et Noirs) s'opposent et jouent à tour de rôle
 - tous les éléments sont connus (jeu à information complète)
 - où le hasard n'intervient pas

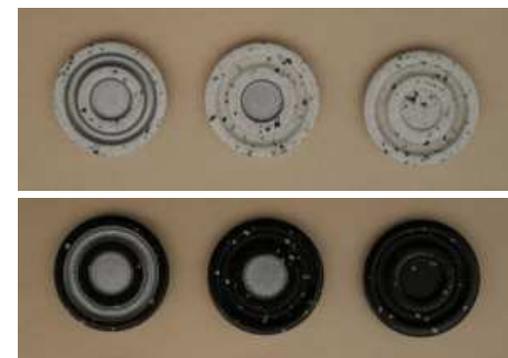


Tzaar : plateau et pièces

- Plateau : hexagone évidé de 60 espaces (sur les intersections)



- Chaque joueur a 30 pièces, de 3 types différents :
6 Tzaars, 9 Tzaaras et 15 Totts



Tzaar : préparation



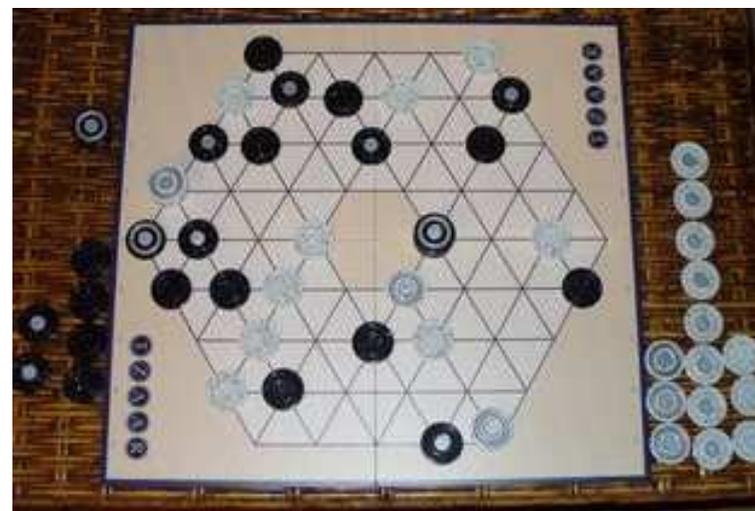
- Placer aléatoirement toutes les pièces sur le plateau
- Blanc joue en premier

Tzaar : comment gagner ?

- 1^{re} possibilité : éliminer un des trois types de pièces de votre adversaire (c'est-à-dire supprimer la trinité Tzaar/Tzaara/Tott)
- 2^{de} possibilité : faire en sorte que votre adversaire ne puisse pas prendre une de vos pièces (ou un empilement de vos pièces) lors de son 1^{er} tour de jeu

Exemple :

Noir vient de jouer et gagne car Blanc n'a plus de Tzaaras



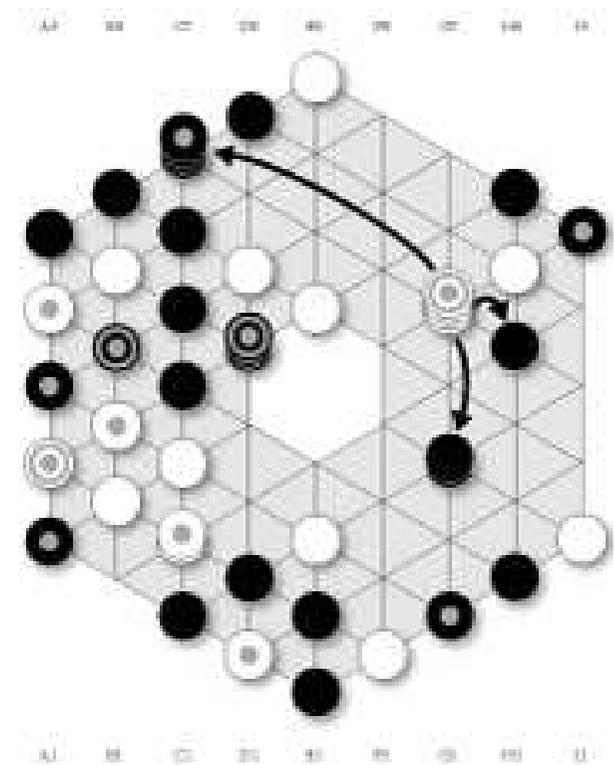
Tzaar : la partie (c.-à-d. les règles)

- Les joueurs effectuent toujours deux coups :
 - 1^{er} coup : *prendre*
 - 2nd coup : *prendre* (de nouveau) ou *empiler* ou *passer*
- *Prendre* : remplacer une pièce adverse par l'une des vôtres sous certaines conditions
- *Empiler* : mettre une de vos pièces sur une autre des vôtres sous certaines conditions
- *Passer* : donner le trait à l'adversaire
- Exception : lors du tout début de la partie, Blanc ne joue que le 1^{er} coup

Tzaar : *prendre*

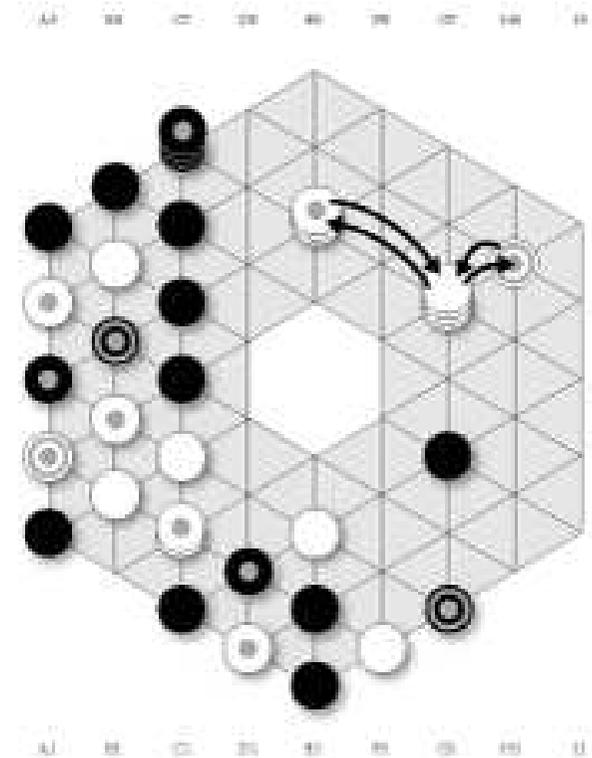
Remplacer la pièce adverse (et la retirer du jeu) se trouvant **en ligne droite** de votre pièce (à côté ou séparée par un ou plusieurs espaces libres) par la votre, à condition que la **taille** de votre empilement de pièces soit **au moins égal** à celle de votre adversaire

- Le type des pièces n'intervient pas
- Toutes les pièces et empilements de pièces se déplacent de la même façon



Tzaar : *empiler*

Faire sauter l'une de vos pièces sur une autre de vos pièces se trouvant **en ligne droite** (à côté ou séparée par un ou plusieurs espaces libres)

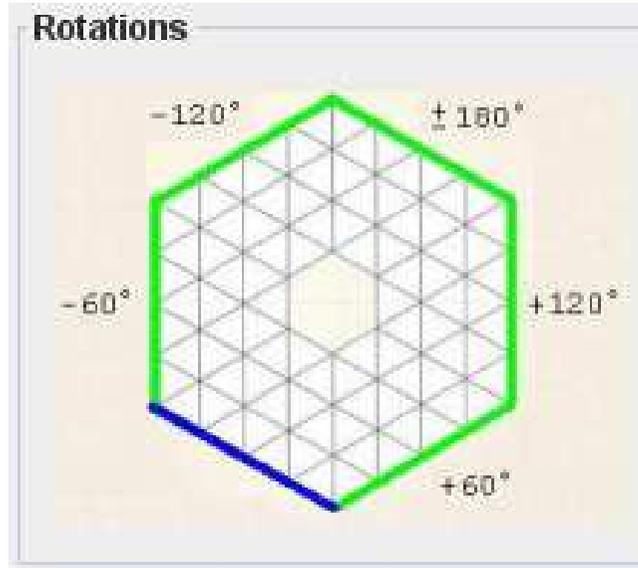


- La taille (de l'empilement de pièces) n'est pas limitée
- L'empilement de pièces doit être déplacé dans sa totalité, comme s'il s'agissait d'une seule pièce
- Le type des pièces n'intervient pas
- Pour chaque empilement, seule compte la pièce au sommet pour la trinité

Tzaar : symétries

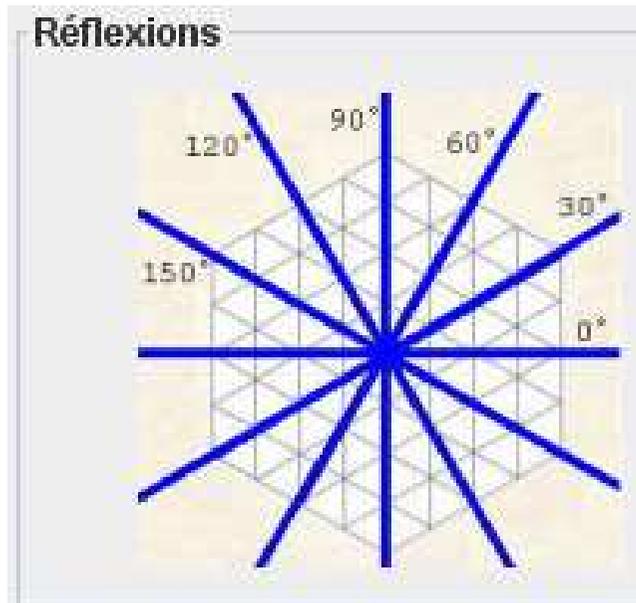
- Rotations :

- $+60^\circ$
- $+120^\circ$
- $\pm 180^\circ$
- -120°
- -60°



- Réflexions :

- 0°
- 30°
- 60°
- 90°
- 120°
- 150°



Tzaar : un programme !

The screenshot displays the Tzaar game interface. The main area features a large hexagonal grid with pieces placed on it. A sidebar on the left shows stacks of pieces with counts: 4 white, 1 black, 1 white, 2 black, 1 white, 3 white, 7 black, 1 white, and 1 black. A 'Passer' button is visible on the board. The right panel contains settings for rules, computer level, initializations, and rotations. The 'Paramètres' panel includes a 'Règles' section with a 'Niveau de l'ordinateur' slider (0-4) and an 'Échanger' button. The 'Initialisations' section has buttons for 'Standard', 'Aléatoire', and 'Partie débutée'. The 'Aide' section shows 'Indicateurs sur la partie' with a counter for moves (21) and checkboxes for 'commencée ?' and 'finie ?'. The 'Rotations' section features a hexagonal grid with rotation angles (-180° to +180°) and a 'Réflexions' section with a star-shaped grid and reflection angles (0° to 150°). A 'Quitter' button is at the bottom.

Paramètres

Règles

Niveau de l'ordinateur

0 1 2 3 4

Échanger

Initialisations

Standard

Aléatoire

Partie débutée

Aide

Indicateurs sur la partie

21 trait(s) joué(s) depuis le début de la partie

commencée ? Trait finie ?

Gagnant

Rotations

-120° ± 180° -180°

-60° +120° -120°

+60° +60°

+120° +180°

Réflexions

120° 90° 60° 0°

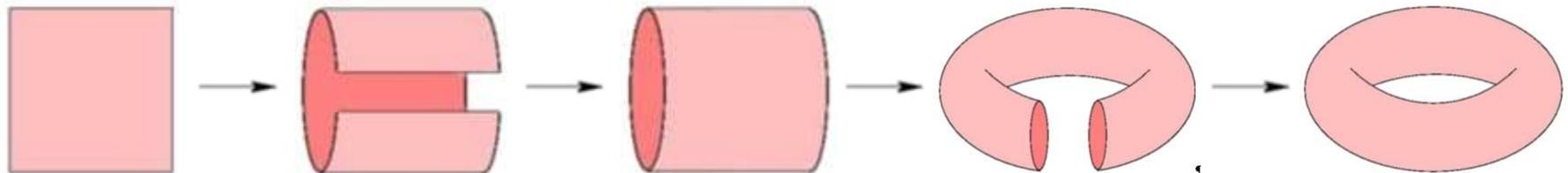
150° 30°

0° 30° 60° 90° 120° 150°

Quitter

Tzaar : votre sujet

- Les règles sont fixées :
 - 1^{er} coup = *prendre*
 - 2nd coup = *prendre* ou *empiler* ou *passer*
 - En début de partie, Blanc ne joue que le 1^{er} coup
- Ce que vous pouvez faire varier :
 - Trinité : un, deux, trois, quatre, ... types de pièces
 - Nombre de pièces de chaque type
 - Plateau : une ou deux ou plusieurs lignes (rectangle voire un cylindre/ruban ou un tore) ou polygones réguliers imbriqués, évidé ou non, etc.



Tzaar : votre sujet

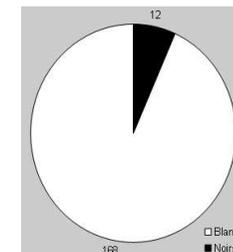
Quelques questions

- En supposant que les deux joueurs jouent au mieux, quelles (et combien de) positions initiales font gagner les Blancs ou les Noirs ?
- Quelle stratégie adopter pour gagner ?
- .../...

Tzaar : votre sujet / un exemple

- Blancs et Noirs ont chacun 1 Tzaar et 2 Tzaaras et jouent sur un plateau rectangulaire de 2 lignes et 3 colonnes (soit de 6 espaces)

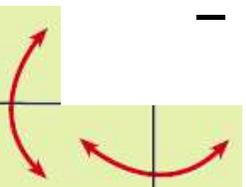
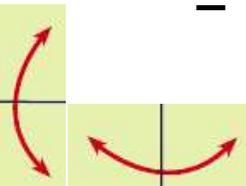
- Il y a $180 = \text{multinomial}(2*3;1,2,1,2) = 6!/(1!2!1!2!)$ positions initiales possibles :



- $60 = 2 * \text{multinomial}(5;1,2,2)$: le Tzaar Noir est dans la colonne centrale

- $108 = 4 * (\text{multinomial}(5;1,2,2) - \text{multinomial}(3;1,2))$: le Tzaar Noir est dans un coin et au moins un de ses deux voisins est une pièce des Blancs

- $12 = 4 * \text{multinomial}(3;1,2)$: le Tzaar Noir est dans un coin et ses deux voisins sont les deux Tzaaras Noirs

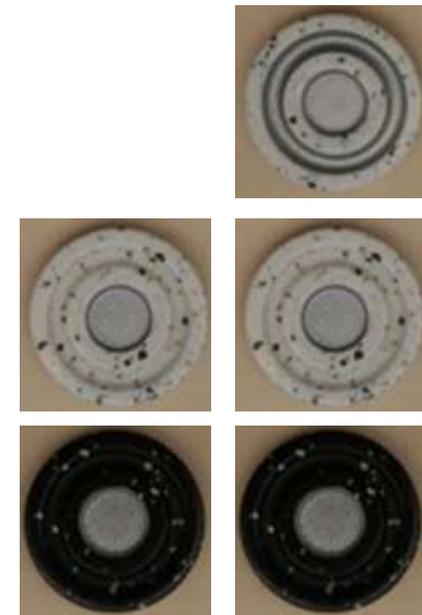
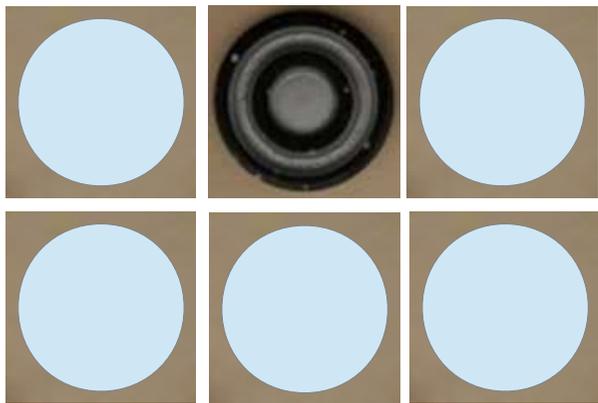


Tzaar : votre sujet / un exemple

1^{er} cas

Le Tzaar Noir est dans la colonne centrale :
Blanc gagne dès le 1^{er} trait

Preuve : le Tzaar Noir a trois voisins ; comme il ne lui reste que deux autres pièces, il a au moins un voisin Blanc qui le prend



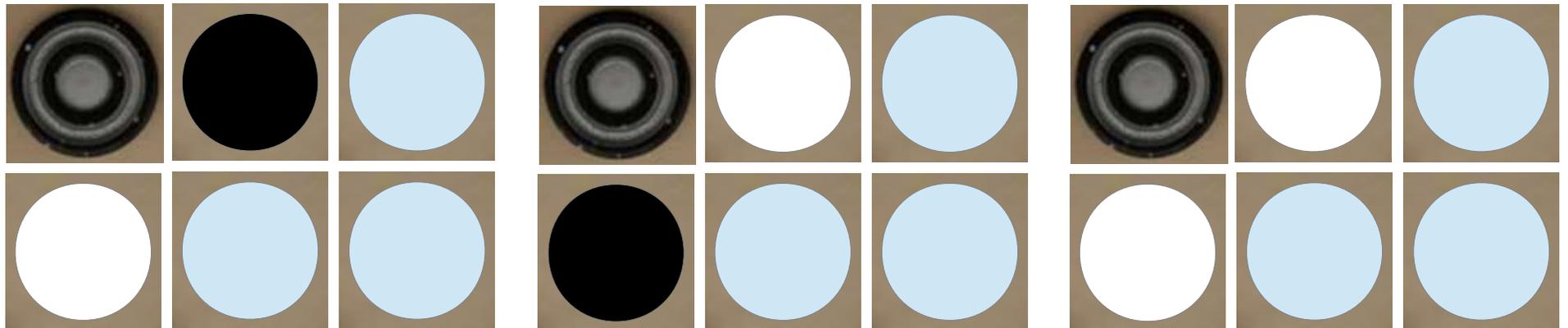
Pièces restant à placer :

Tzaar : votre sujet / un exemple

2^e cas

Le Tzaar Noir est dans un coin et au moins un de ses deux voisins est une pièce des Blancs : Blanc gagne dès le 1^{er} trait

Preuve : un voisin Blanc prend le Tzaar Noir

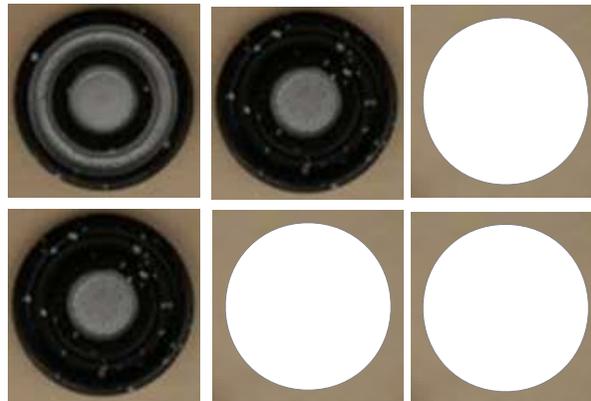


Tzaar : votre sujet / un exemple

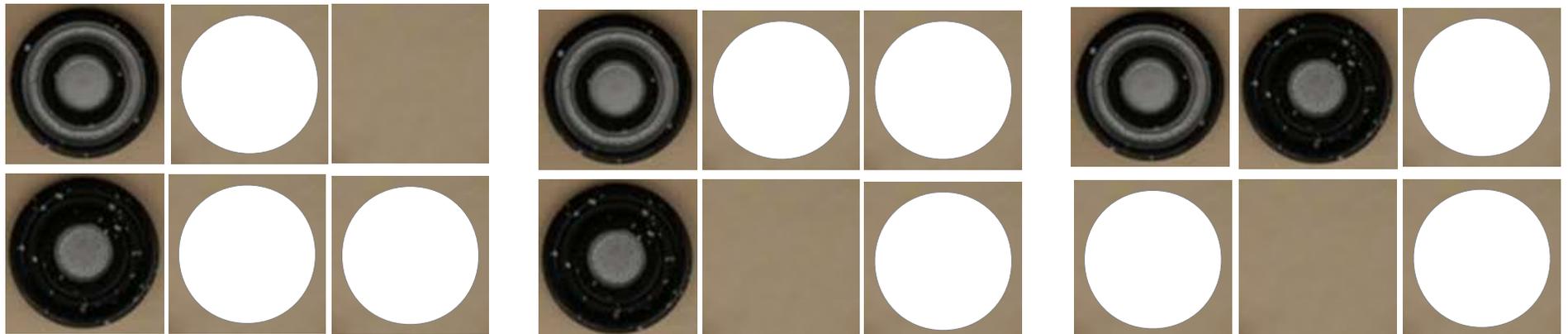
3^e cas

Le Tzaar Noir est dans un coin et ses deux voisins sont les deux Tzaaras Noirs

Position initiale :



Après le 1^{er} trait des Blancs (3 possibilités) :



Tzaar : votre sujet / un exemple 3^e cas (preuve)

Le Tzaar Noir est dans un coin et ses deux voisins sont les deux Tzaaras Noirs :

Noir gagne dès son 1^{er} trait

Preuve : quelque soit la position après le 1^{er} trait Blanc, Noir gagne en faisant deux prises (d'une part il ne peut pas empiler, d'autre part il pourrait perdre en passant) soit des deux Tzaaras Blancs soit du Tzaar Blanc et d'un Tzaara Blanc (en fait, il peut toujours s'arranger pour prendre le Tzaar Blanc, au 1^{er} ou au 2nd coup)

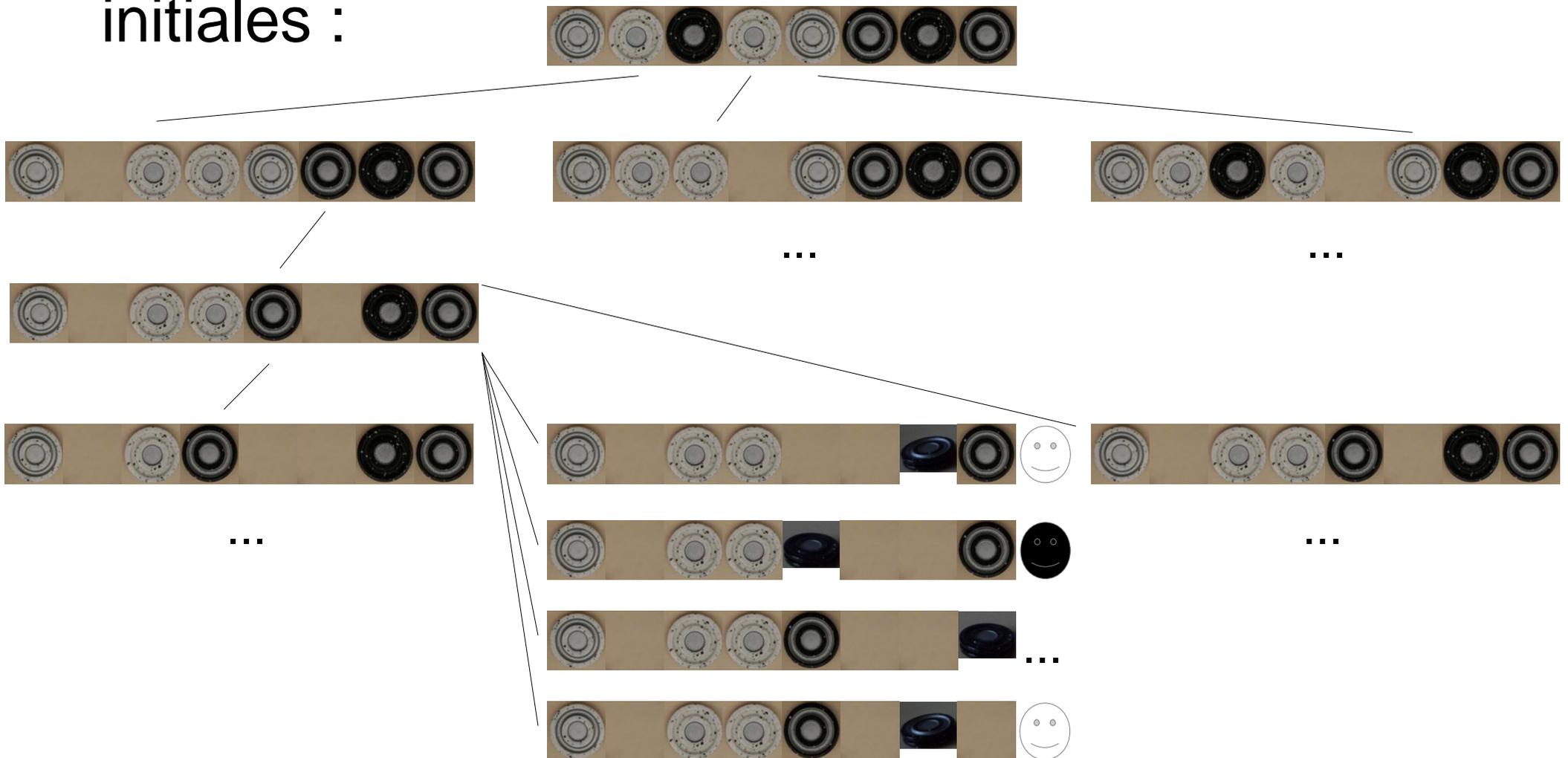
Tzaar : votre sujet / un exemple

Remarques

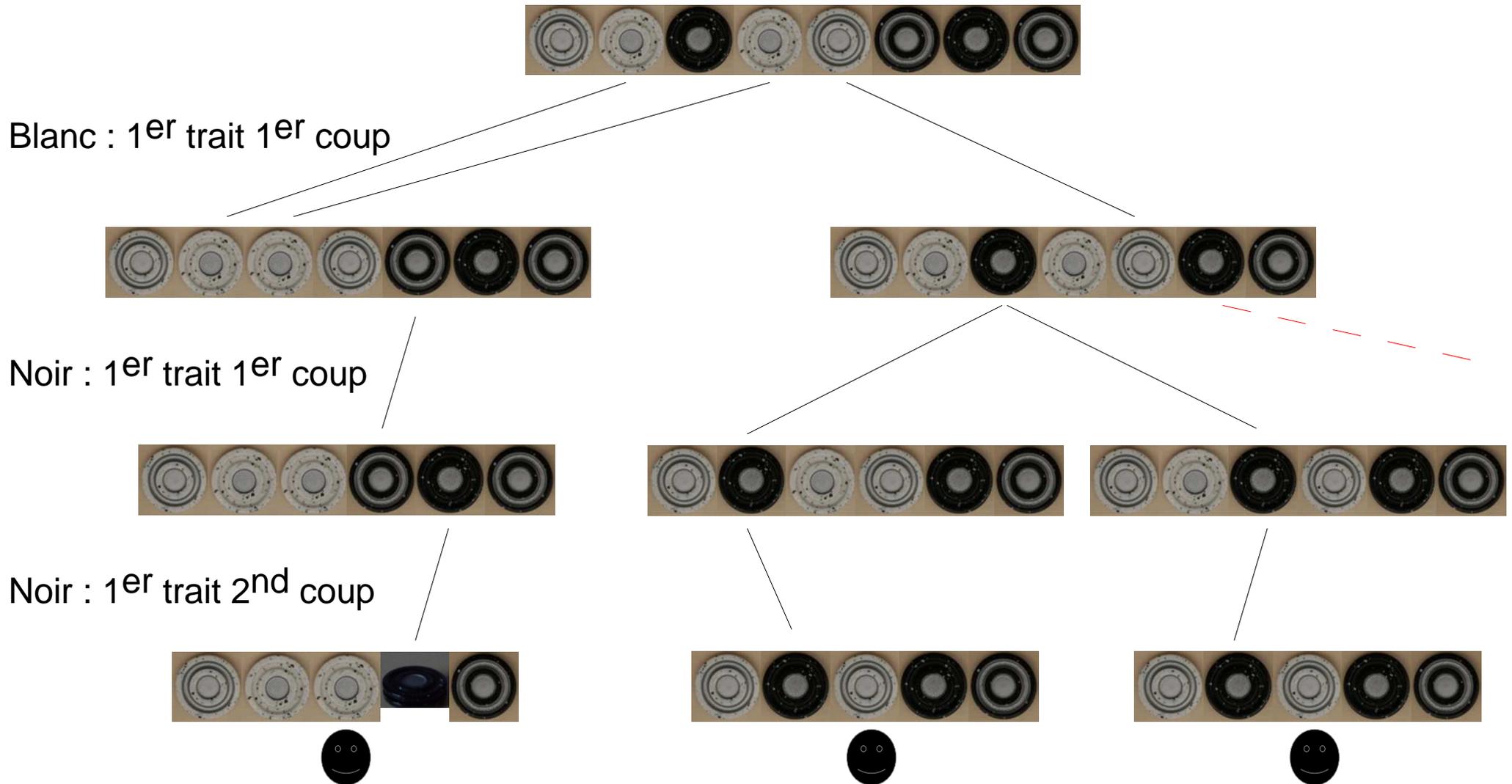
- La partie se finit très rapidement, soit suite au 1^{er} trait des Blancs, soit suite au 1^{er} trait (1^{er} ou 2nd coup) des Noirs
- La partie se finit sans empiler (ni passer car chaque joueur joue au mieux)
- Si le plateau est un ruban (on relie les deux espaces en début de ligne respectivement aux deux espaces en fin de ligne), Blanc gagne dès le 1^{er} trait car le Tzaar Noir a trois voisins, et donc au moins une pièce des Blancs qui le prend (comme dans le 1^{er} cas)

Arbre de jeu / exemple

2 Tzaars et 2 Tzaaras, sur une ligne de longueur 8, une des $2520 = \text{multinomial}(8;2,2,2,2)$ positions initiales :

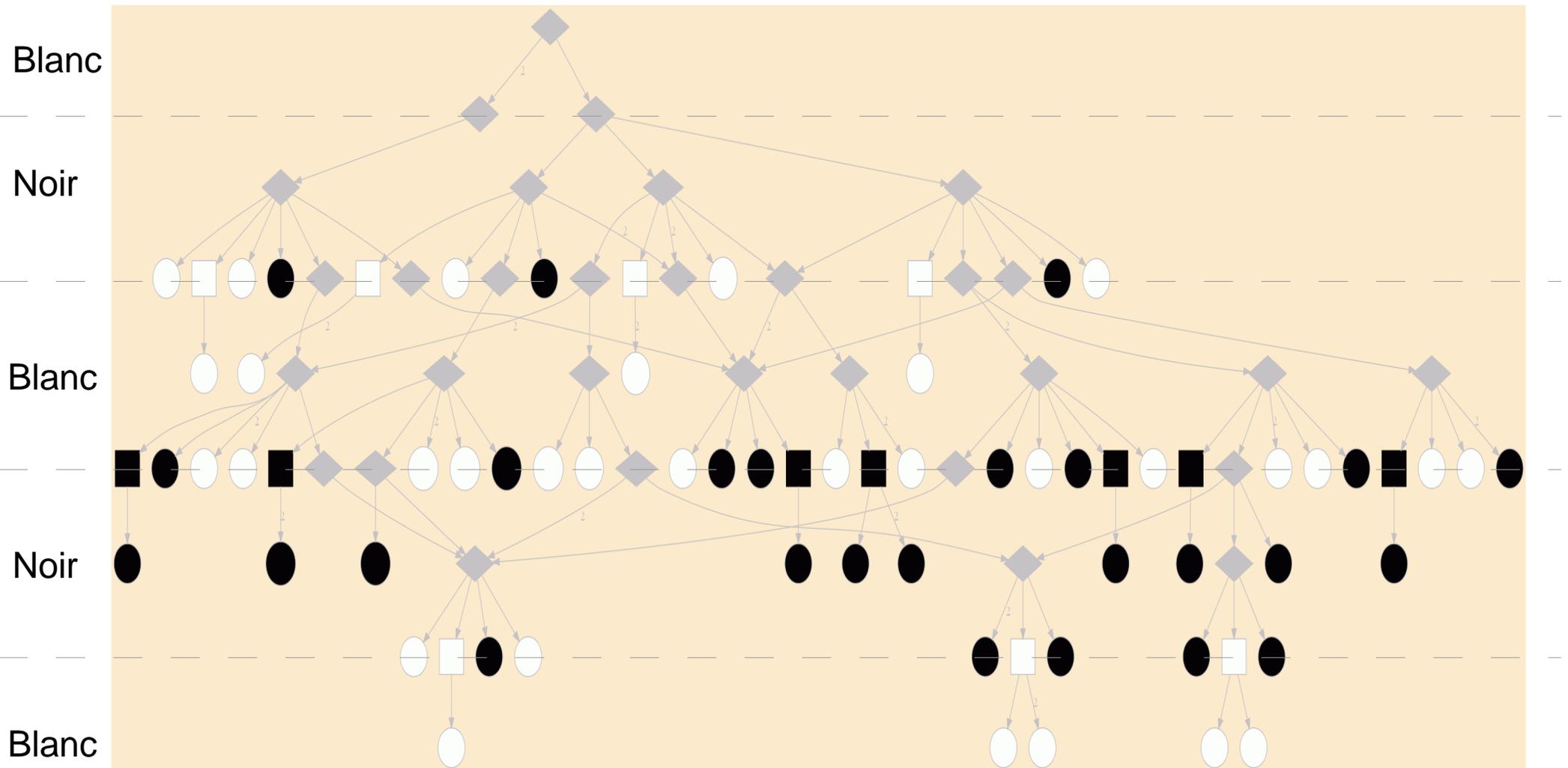


Arbre de jeu / exemple



Noir peut toujours gagner

Graphe orienté acyclique de jeu / exemple



Cf. algorithme MinMax de von Neumann
[http://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_minimax]