Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus vive gratitude à Mr Julian West pour la qualité de son encadrement et pour m'avoir initié au domaine passionnant des permutations sans sous-séquence interdite.

Toute ma reconnaissance va au professeur Serge Dulucq qui a eu la bonté de me conseiller.

Mes remerciements s'adressent également aux personnes qui m'ont soutenu durant cette année de DEA, ainsi qu'à ceux qui m'ont sensibilisé aux problèmes combinatoires.

Table des matières

Introduction

Les permutations sans sous-séquence interdite intéressent tout particulièrement les informaticiens. Citons simplement D.E. KNUTH qui a montré [KNUTH 73] que l'ensemble des permutations triables par une pile, en bijection avec les mots de Dyck de longueur $2n$, est exactement l'ensemble des permutations sans la forme 231.

Le principal problème consiste à déterminer le cardinal de chacun de ces ensembles et, si deux d'entre-eux sont équivalents, de trouver une bijection les liant. Par exemple, J. WEST a proposé [WEST 90] une méthode consistant à étiqueter chaque arbre de permutations sans sous-séquence interdite et à les associer ensuite deux à deux par isomorphisme.

Ce mémoire s'intègre précisément aux recherches actuelles de J. WEST. Il présente dans sa première partie les permutations sans sous-séquence interdite via quelques définitions, de nouvelles propriétés, et l'outil qui a été développé. La seconde partie expose deux résultats concernant les derniers cas non encore résolus des classes des symétries complètes (cf. [STANKOVA 92]) pour des permutations interdites de taille 4; elle propose également plusieurs spéculations.

Partie I

Vers un nouvel outil : forbid

Chapitre 1

Définitions

Ce chapitre introduit les définitions et notations concernant les permutations sans sous-séquence interdite.

Définition 1.1 *Une* **permutation** $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)) \in S_n$ *est une séquence de* n *éléments où chacun, entre* 1 *et* n*, est présent une fois et une seule.*

On parle aussi de permutation sur $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.
Par la suite, les permutations sur $[n]$, pour $n < 10$, seront écrites en juxtaposant les chiffres $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$.
Exemple : $\pi = (3, 5, 1, 4, 2) \in S_5$ et s'écrit $\pi = 35142$.

Définition 1.2 $\pi \in \mathbf{S_n}(\tau)$ *l'ensemble des permutations sans la sous-séquence interdite* τ $\iff \pi \in S_n$ *et* π *ne contient pas la sous-séquence interdite* $\tau \in S_k$*, c'est à dire s'il n'existe pas* $1 \leq i_{\tau(1)} < i_{\tau(2)} < \cdots < i_{\tau(k)} \leq n$ *tels que* $\pi(i_1) < \pi(i_2) < \cdots < \pi(i_k)$.

$(\pi(i_{\tau(1)}), \pi(i_{\tau(2)}), \dots, \pi(i_{\tau(k)}))$ s'appelle une sous-séquence de forme τ.
Exemple : $\pi = 35142 \in S_5(123)$ mais $\pi \notin S_5(213)$ car la sous-séquence $(\pi(1), \pi(3), \pi(4)) = 314$ est de forme 213.

Ainsi, on peut définir $S_n(\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^m) = S_n(\tau^1) \cap S_n(\tau^2) \cap \cdots \cap S_n(\tau^m)$ l'ensemble des permutations sur $[n]$ ne contenant aucune des m sous-séquences interdites $\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^m$.
Exemple : $\pi = 35142 \in S_5(123, 361425, 4321)$.

Proposition 1.1 $\tau' \notin S_{k'}(\tau) \Longrightarrow S_n(\tau, \tau') = S_n(\tau)$.

Les contraintes imposées par τ sont plus fortes et recouvrent entièrement celles de τ'. $\square$

Définition 1.3
Les **trois bijections standards** *sont définies ainsi* $(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$ *:*

miroir $\pi \in S_n, \pi^{|} \in S_n$ *tel que* $\pi^{|}(i) = \pi(n + 1 - i)$

complément $\pi \in S_n, \pi^- \in S_n$ *tel que* $\pi^-(i) = n + 1 - \pi(i)$

inverse $\pi \in S_n, \pi^{-1} \in S_n$ *tel que* $\pi^{-1}(i) = j \Longleftrightarrow \pi(j) = i$

Exemple : soit $\pi = 231$; on a $\pi^{|} = 132$, $\pi^- = 213$, $\pi^{-1} = 312$.
Cf. également la section C.1.

Propriété 1.1 *Signalons quelques propriétés des trois bijections standards :*

- $(\pi^{|})^{|} = (\pi^-)^- = (\pi^{-1})^{-1} = \pi$ *(involutions)*
- $\pi \in S_n(\tau) \Longleftrightarrow \pi^{|} \in S_n(\tau^{|}) \Longleftrightarrow \pi^- \in S_n(\tau^-) \Longleftrightarrow \pi^{-1} \in S_n(\tau^{-1})$
- $(\pi^{-1})^{|} = (\pi^-)^{-1}$ *et* $(\pi^{-1})^- = (\pi^{|})^{-1}$

J. West en a donné les preuves dans [West 90].

Définition 1.4 *On note* $S_n^*(\tau) = S_n(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^m)$ *la* **classe des symétries complètes** *obtenues à partir des trois bijections standards.*

$\{\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^m\}$ constitue l'ensemble (sans répétition) exhaustif des permutations qui peuvent être obtenues à partir de chaque τ^i en utilisant les trois bijections standards;
$\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \{(\tau^i)^{|}, (\tau^i)^-, (\tau^i)^{-1}\} \subseteq \{\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^m\}$.

τ est le représentant canonique de cet ensemble, c'est à dire la plus petite permutation dans l'ordre lexicographique.

Exemple : $S_n^*(123) = S_n(123, 321)$.
Cf. également la section C.2.

Remarque : $\forall \tau$ sur $[k]$, $k \geq 2$, $m = 2$, 4 ou 8.

Définition 1.5 $|S_n(\tau)|$ *désigne le* **cardinal** *de l'ensemble* $S_n(\tau)$.

Exemple : $|S_n(123)| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = c_n =$ les nombres de Catalan.

Définition 1.6 *Un* **site** *i, pour i variant de 1 à $n + 1$, d'une permutation $\pi \in S_n$ est l'indice d'insertion de l'élément $n + 1$ dans π.*

La permutation π' sur $[n + 1]$ ainsi obtenue est alors $(\pi(1), \ldots, \pi(i - 1), n + 1, \pi(i), \ldots, \pi(n))$ avec $\pi'(i) = n + 1$.
L'élément $n + 1$ est inséré entre les éléments $\pi(i - 1)$ et $\pi(i)$ pour i variant de 2 à n, avant l'élément $\pi(1)$ pour $i = 1$, après l'élément $\pi(n)$ pour $i = n + 1$.

Soit $\pi \in S_n(\tau)$.

Le site i est **actif** pour π quand $\pi' \in S_n(\tau)$ et est inactif si $\pi' \notin S_n(\tau)$.

Les symboles $_\diamond$, $.$, et $_?$ représenteront respectivement un site actif, inactif, et inconnu d'une permutation.

Exemple : $\pi = {}_\diamond 3_\diamond 5.1.4.2_\diamond \in S_5(2341)$ a trois sites actifs (1, 2, et 6) et trois sites inactifs (3, 4, et 5).

Définition 1.7 *On définit l'***arbre de permutations** T *ainsi :*

- *les sommets au niveau n sont les permutations sur $[n]$; la racine de T est donc la permutation 1 sur $[1]$*
- *un arc relie π_n sur $[n]$ à π_{n+1} sur $[n+1]$ si et seulement si π_{n+1}, sans l'élément $n+1$, est équivalente à π_n ; on notera alors $\pi_n = \pi_{n+1} - \{n+1\}$*

On définit de même l'arbre de permutations $T(\tau)$ en respectant une contrainte supplémentaire : les permutations sur $[n]$ doivent appartenir à $S_n(\tau)$.

Dans la majorité des cas, $T(\tau)$ est un arbre infini. Aussi, souvent, on limite la hauteur de l'arbre en demandant $T_N(\tau)$, c'est à dire en construisant l'arbre contenant les permutations de $S_1(\tau), S_2(\tau), \ldots, S_N(\tau)$.

Il est également possible de construire l'arbre de permutations depuis une permutation racine de $S_n(\tau)$ autre que 1 sur $[1]$.

Exemple : $T_3(123)$ de racine 12.

$$\begin{array}{ccc} & {}_\diamond 1_\diamond 2. & \\ \swarrow & & \searrow \\ {}_\diamond 3_\diamond 1_\diamond 2. & & {}_\diamond 1\ {}_\diamond 3.2. \end{array}$$

Proposition 1.2
$\mid S_{n+1}(\tau) \mid$ vaut la somme des nombres de fils de toutes les permutations de $S_n(\tau)$.

Le nombre de fils d'une permutation π sur $[n]$ est le nombre de ses sites actifs, puisque ces derniers sont les exactes possibilités pour insérer l'élément $n+1$ dans π. □

Exemple : $T_3(123, 132)$.
Chaque permutation est suivie de son nombre de fils entre parenthèses.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & {}_\diamond 1_\diamond(2) & & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & {}_\diamond 2_\diamond 1_\diamond(3) & & & & {}_\diamond 1.2.(1) & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow & & & \downarrow & \\ {}_\diamond 3_\diamond 2_\diamond 1_\diamond(4) & {}_\diamond 2.3.1.(1) & & {}_\diamond 2.1.3.(1) & & {}_\diamond 3_\diamond 1.2.(2) & \end{array}$$

$|\,S_1(123, 132)| = |\{1\}| = 1$
$|\,S_2(123, 132)| = |\{21, 12\}| = 2 = (2)$
$|\,S_3(123, 132)| = |\{321, 231, 213, 312\}| = 4 = (3) + (1)$
$|\,S_4(123, 132)| = 8 = (4) + (1) + (1) + (2)$

Proposition 1.3 *$T(\tau)$ est isomorphe à $T(\tau^{|})$, $\forall \tau$.*

$\pi \in S_n(\tau)$ admet un site i actif ou inactif $\iff \pi^{|} \in S_n(\tau^{|})$ admet le site $n+2-i$ respectivement actif ou inactif. □

On notera $T(\tau) \cong T(\tau')$ quand les deux arbres sont isomorphes.

Définition 1.8 *Une façon de caractériser $T(\tau)$ consiste en un* **jeu** *de règles. Celui-ci remplace les permutations par une* **étiquette**, *définit pour chaque étiquette différente sa* **règle** *de succession, et donne l'étiquette d'initialisation.*

L'étiquette d'initialisation correspond à la permutation 1 sur [1] racine de l'arbre tandis que chaque règle de succession spécifie les étiquettes de tous les fils.

L'étiquette peut contenir plusieurs informations, mais précise le plus souvent au moins le nombre de fils.

Exemple : $\pi \in T(123)$ d'étiquette (t) où t est le nombre de fils; alors, les t fils ont les étiquettes (2), (3), $\ldots$, $(t+1)$. L'étiquette d'initialisation est (2). On notera ce jeu de règles :

$$\begin{cases} (2) & \\ (t) & \rightsquigarrow \quad (2),(3),\ldots,(t+1) \end{cases}$$

Le jeu de règles diffère souvent d'un arbre à un autre. Toutefois, si celui de $T(\tau)$ est identique à celui de $T(\tau')$, on en déduit que les deux arbres sont isomorphes; $S_n(\tau)$ et $S_n(\tau')$ sont donc en bijection.
Par contre, la réciproque est fausse : on peut avoir $|S_n(\tau)| = |S_n(\tau')|$ mais deux jeux de règles distincts.

Définition 1.9 *Une permutation p-***barrée** *sur $[k]$ est une permutation de S_k dont on distingue p ($\in [1; k-1]$) éléments.*

Exemple : $\pi = 4\overline{3}152$ est une permutation 1-barrée sur [5] où le seul élément distingué est 3.

Remarque : Le nombre de permutations p-barrées sur $[k]$ est $\binom{n}{p}.n!$

On peut voir les permutations définies jusqu'à présent comme des permutations 0-barrées.

Définition 1.10
Soit $S_n(\overline{\tau})$ l'ensemble des permutations sans la sous-séquence interdite barrée $\overline{\tau}$.
$\pi \in S_n(\overline{\tau}) \Longleftrightarrow \forall \widehat{\sigma}$ *de forme* $\widehat{\tau}$, $\exists \sigma \supset \widehat{\sigma}$ *de forme* τ.

On note :

$\overline{\tau}$ la permutation p-barrée sur $[k]$.

τ la permutation sur $[k]$ identique à $\overline{\tau}$, mais sans distinguer aucun élément.

$\widehat{\tau}$ la permutation sur $[k-p]$ constituée à partir de la sous-séquence des éléments non distingués de $\overline{\tau}$ ramenés à une permutation.

$\widehat{\sigma}$ une sous-séquence de $(k-p)$ éléments de π de forme $\widehat{\tau}$.

σ une sous-séquence de k éléments de π de forme τ, reprenant entièrement les éléments de $\widehat{\sigma}$, et en intercalant p éléments de π exactement aux positions des éléments distingués de $\overline{\tau}$.

Exemple : $S_n(31\overline{2}4)$ avec $\overline{\tau} = 31\overline{2}4$, $\tau = 3124$, $\widehat{\tau} = 213$.
$1432 \in S_4(31\overline{2}4)$ car aucune sous-séquence n'est de forme 213.
$14325 \notin S_5(31\overline{2}4)$ car la sous-séquence 425 est de forme 213 et $\nexists e$ tel que $(4, 2, e, 5)$ soit de forme 3124.

Exemple : $S_n(31\overline{4}2)$ avec $\overline{\tau} = 31\overline{4}2$, $\tau = 3142$, $\widehat{\tau} = 312$.
$24153 \in S_5(31\overline{4}2)$ car la seule sous-séquence de forme 312 est 413, et 4153 est bien de forme 3142.
$1423 \notin S_4(31\overline{4}2)$ tandis que $14253 \in S_5(31\overline{4}2)$.

L'arbre de permutations $T(\overline{\tau})$ peut devenir une forêt ; rien n'empêche d'avoir plusieurs racines.

Chapitre 2

Nouvelles propriétés

Ce chapitre expose quelques propriétés découvertes lors de l'élaboration de l'outil *forbid* pour son optimisation.

Proposition 2.1 *Un site inactif pour $\pi \in S_n(\tau)$ restera inactif pour toute sa descendance ($\forall \pi' \in S_{n'}(\tau)$ avec $n' > n$).*

En effet, s'il est impossible d'insérer $n+1$ en site i, c'est à dire entre les deux éléments $e_1 = \pi(i-1)$ et $e_2 = \pi(i)$, cela sera toujours impossible pour tout autre élément $n' \geq n+1$ entre e_1 et e_2. $\square$

Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} & \pi = {}_{\diamond}3{}_{\diamond}5.1.4.2{}_{\diamond} & & & \in S_5(2341) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow & & \\ {}_{?}6{}_{?}3{}_{?}5.1.4.2{}_{?} & {}_{?}3{}_{?}6{}_{?}5.1.4.2{}_{?} & & {}_{?}3{}_{?}5.1.4.2{}_{?}6{}_{?} & \in S_6(2341) \end{array}$$

Les . et ${}_{?}$ des permutations sur [6] sont respectivement les sites inactifs hérités de $\pi \in S_5(2341)$ et les sites à tester.

Cette proposition reste valable même si τ est une liste de sous-séquences interdites. Par contre, elle ne s'applique pas aux sous-séquences interdites barrées.

Corollaire 2.1 *$\pi \in S_n(\tau)$ a t fils $\in S_{n+1}(\tau)$ qui ont au plus $t+1$ fils.*

D'une part les sites inactifs le restent, et d'autre part l'insertion de l'élément $n+1$ ne peut créer au plus qu'un nouveau site actif. $\square$

Proposition 2.2 *Une sous-séquence interdite τ sur $[k]$ autorise toujours au moins $k-1$ sites actifs pour $\pi \in S_n(\tau)$, dès que $n \geq k-2$; pour $n < k-2$, les sites de π sont tous actifs.*

Les sites toujours actifs sont les sites :

- 1 à $(\tau^{-1}(k) - 1)$, sites complètement à gauche dans π
- $(n - k + \tau^{-1}(k) + 2)$ à $(n+1)$, sites complètement à droite dans π

Toutefois, si $\tau^{-1}(k)$ vaut 1 ou k, les sites toujours actifs respectivement à gauche ou à droite n'existent pas. $\square$

Exemple : $\pi = {}_\diamond\pi(1)_\diamond\pi(2)_?\pi(3)_? \ldots {}_? \pi(n-1)_?\pi(n)_\diamond \in S_n(2341)$.

Dans le cas d'un ensemble de sous-séquences interdites $\{\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^m\}$, les sites toujours actifs de $\pi \in S_n(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^m)$ seront ceux qui sont toujours actifs pour toutes les permutations interdites.

Exemple :

$$\begin{array}{lcll}
\pi & = & {}_\diamond\pi(1)_\diamond\pi(2)_?\pi(3)_? \ldots {}_? \pi(n-1)_?\pi(n)_\diamond & \in S_n(2341) \\
\pi & = & {}_?\pi(1)_?\pi(2)_?\pi(3)_? \ldots {}_? \pi(n-1)_\diamond\pi(n)_\diamond & \in S_n(312) \\
\pi & = & {}_?\pi(1)_?\pi(2)_?\pi(3)_? \ldots {}_? \pi(n-1)_?\pi(n)_\diamond & \in S_n(2341, 312)
\end{array}$$

Proposition 2.3 *Vérifier si $\pi \in S_n(\tau)$ où $\tau \in S_k$ revient à rechercher les sous-séquences $\tau_{k-2} = \tau - \{k-1, k\}$ dans $\pi_{n-2} = \pi - \{n-1, n\}$ et à associer k à n et $k-1$ à $n-1$, dans la mesure où on aura vérifié précédemment que $\pi_{n-2} \in S_{n-2}(\tau)$ et que $\pi_{n-1} = \pi - \{n\} \in S_{n-1}(\tau)$.*

Tout d'abord, il faut associer un élément de τ à l'élément n de π ; sinon, cela revient à tester si $\pi_{n-1} \in ?\ S_{n-1}(\tau)$, ce qui a déjà été vérifié positivement. Cet élément de τ à associer à n est obligatoirement k puisque n est le plus grand élément de π.

Ensuite, il faut associer un élément de τ à l'élément $n-1$ de π. En effet, dans le cas contraire, cela reviendrait à rechercher si $\pi'_{n-1} = \pi_n - \{n-1\} \in ?\ S_{n-1}(\tau)$. Or, l'insertion de n correspond forcément à un site actif de $\pi_{n-2} \in S_{n-2}(\tau)$: ce test a donc déjà été vérifié positivement. Cet élément de τ à associer à $n-1$ est immédiatement inférieur à celui ($= k$) de n ; il s'agit de $k-1$. $\square$

Remarque 2.1 sur la proposition 2.3. *L'opération consiste alors à regarder si π_{n-2} est de forme τ_{k-2} en respectant toutefois une autre contrainte.*
π_{n-2} et τ_{k-2} sont respectivement divisées en trois sous-séquences π^L_{n-2},π^C_{n-2},π^R_{n-2} et τ^L_{k-2},τ^C_{k-2},τ^R_{k-2} par les deux plus grands éléments $\{n-1, n\}$ et $\{k-1, k\}$.
$\forall \alpha \in \{L, C, R\}$, on ne doit associer des éléments de π^α_{n-2} qu'avec ceux de τ^α_{k-2} ; de plus, il faut s'assurer que $|\pi^\alpha_{n-2}| \geq |\tau^\alpha_{k-2}|$.

Exemple : $\pi_7 = 3257164 \in ?\ S_7(1423)$ sachant que $\pi_6 = 325164 \in S_6(1423)$, et donc que $\pi_5 = 32514 \in S_5(1423)$, avec $\tau_4 = 1423$ et $\tau_2 = 12$? On a $\pi^L_5 = 325, \pi^C_5 = 1, \pi^R_5 = 4$ et $\tau^L_2 = 1, \tau^C_2 = 2, \tau^R_2$ vide. Il faut alors considérer les $\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0} = 3$ possibilités suivantes : 31, 21, 51 sont-elles de forme 12 ? La réponse étant négative, $\pi_7 \in S_7(1423)$.

Corollaire 2.2 de la proposition 2.3. *Si le signe de $\pi^{-1}(n-1) - \pi^{-1}(n)$ diffère de celui de $\tau^{-1}(k-1) - \tau^{-1}(k)$, alors le site est actif.*

On ne peut pas associer simultanément $n-1$ à $k-1$ et n à k tout en respectant l'ordre des indices de ces éléments. $\square$

Proposition 2.4 $\pi \in S^*_n(\tau) \iff \pi^| \in S^*_n(\tau) \iff \pi^- \in S^*_n(\tau) \iff \pi^{-1} \in S^*_n(\tau)$.

En effet, l'ensemble défini en 1.4, à savoir $\{\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^m\}$, est équivalent à $\{(\tau^1)^|, (\tau^2)^|, \ldots, (\tau^m)^|\}$, $\{(\tau^1)^-, (\tau^2)^-, \ldots, (\tau^m)^-\}$, et $\{(\tau^1)^{-1}, (\tau^2)^{-1}, \ldots, (\tau^m)^{-1}\}$. $\square$

Proposition 2.5 *Une permutation 1-barrée sur $[k]$ dont l'élément distingué n'est pas k génère un arbre de permutations $T(\overline{\tau})$ ayant une racine unique.*

Remarque : Les notations utilisées ci-dessous reprennent celles de la définition 1.10.

Soit $\overline{\tau}$ d'élément distingué $j < k$ avec $i = \overline{\tau}^{-1}(j)$.
Soit $\pi_n \notin S_n(\overline{\tau})$. $\exists \widehat{\sigma}$ une sous-séquence de π_n de $k-1$ éléments de forme $\widehat{\tau}$. Mais $\forall e$, avec $\pi_n^{-1}(\widehat{\sigma}(i-1)) < \pi_n^{-1}(e) < \pi_n^{-1}(\widehat{\sigma}(i))$, $\sigma = \widehat{\sigma} + \{e\}$ où e est inséré en $i^{\text{ème}}$ position, une sous-séquence de π_n de k éléments, aucune n'est de forme τ.
Soit $\pi_{n-1} = \pi_n - \{n\} \in S_{n-1}(\overline{\tau})$; alors, $n \in \widehat{\sigma}$ (sinon, $\widehat{\sigma}$ serait aussi une sous-séquence de π_{n-1}).
Par conséquent, si on insère $n' > n$ dans l'intervalle défini pour e, $\widehat{\sigma}$ ne sera toujours pas de forme τ puisque n' doit s'associer à l'élément j tandis que n est associé à k. A plus forte raison, si n' est inséré hors de cet intervalle, on ne pourra jamais obtenir pour $\widehat{\sigma}$ une sous-séquence σ de forme τ. $\square$

Proposition 2.6 *Une permutation 1-barrée sur $[k]$ dont l'élément distingué est k et telle que $\mid \tau^{-1}(k) - \tau^{-1}(k-1) \mid = 1$ génère un arbre de permutations $T(\overline{\tau})$ ayant une racine unique.*

Remarque : Les notations utilisées ci-dessous reprennent celles de la définition 1.10.

Soit $\pi_{n-1} \in S_{n-1}(\overline{\tau})$ et $\pi_n = \pi_{n-1} + \{n\} \notin S_n(\overline{\tau})$. π_n a une sous-séquence $\widehat{\sigma} \ni n$ de $k-1$ éléments de forme $\widehat{\tau}$ sans qu'existe σ de forme τ. Mais soit $\widehat{\sigma}$ interdira à $\pi_{n'} = \pi_n + \{n+1, n+2, \ldots, n'\}$ avec $n' > n$ d'appartenir à $S_{n'}(\overline{\tau})$, soit $\sigma' = \widehat{\sigma} - \{n\} + \{n'\}$ sera également de forme $\widehat{\tau}$ sans qu'existe pour autant σ' de forme τ. $\square$

Définition 2.1 *On note $S_n(\tau)[\tau']$ l'ensemble des permutations de $S_n(\tau)$ ayant au moins une sous-séquence de forme τ'.*

Proposition 2.7 $S_n(\tau) = S_n(\tau, \tau') \cup S_n(\tau)[\tau']$, $\forall \tau, \tau'$, *avec* $S_n(\tau, \tau') \cap S_n(\tau)[\tau'] = \emptyset$.

Les permutations de $S_n(\tau)$ peuvent être divisées en deux ensembles disjoints : celles excluant la forme τ' et celles admettant au moins une sous-séquence de forme τ'. $\square$

Chapitre 3

forbid

Ce chapitre présente le programme qui a été développé pour mieux étudier les permutations sans sous-séquence interdite. Il propose une présentation de *forbid*, ses principaux algorithmes et leur complexité, et un bilan.

3.1 Présentation générale de *forbid*

L'objectif de *forbid* est de renseigner sur l'arbre ou la forêt de permutations sans sous-séquence interdite $T_N(\tau, \ldots)$.

L'outil accepte de travailler avec un nombre quelconque de sous-séquences interdites, barrées ou non.
Par contre, il impose une hauteur maximale pour l'arbre.
Enfin, le traitement peut s'effectuer à partir d'une ou plusieurs permutations racines.

Les informations données par *forbid* peuvent être regroupées en deux grandes familles de sorties : les ventilations du cardinal et des représentations de l'arbre.
Les ventilations de $|S_n(\tau, \ldots)|$ se font selon un critère unique ; celui-ci peut être le nombre de fils, de saillants, de descentes ou de montées, d'excédences, ou l'indice du plus grand élément.
Les représentations de $T_N(\tau, \ldots)$ sont possibles soit globalement à chaque arbre de permutations selon un format ASCII, un export vers CABRI, ou un mot parenthésé, soit localement entre un sommet et ses fils avec les règles et la table des fils.
De plus, deux scripts UNIX permettent d'obtenir $S_N(\tau, \ldots)$ et l'arbre selon un mot de Dyck.

L'annexe A donne un guide d'utilisation de *forbid*, et offre ainsi une présentation plus détaillée de ses possibilités, notamment à propos de ses différentes sorties.

3.2 Algorithmes commentés de *forbid*

Cette section présente *forbid* par l'étude de ses principaux algorithmes.
Ceux détaillés ci-dessous concernent la construction de l'arbre (ou de la forêt) de permutations $T(\tau, \ldots)$ où aucune des permutations interdites de $\{\tau, \ldots\}$ n'est barrée.

Notation :
$\{\tau, \ldots\}$ la liste des permutations (non barrées) interdites
$\tau_k \in \{\tau, \ldots\}$ une des permutations interdites sur $[k]$
ρ_p la permutation sur $[p]$ racine d'un arbre de permutations
$\pi_{n'}$ une permutation sur $[n']$ $(n' = n-1, n, n+1)$
$site_{n'}$ le site d'insertion de l'élément n' dans $\pi_{n'-1}$
$\sigma^L_{n'}, \sigma^C_{n'}, \sigma^R_{n'}$ respectivement les sous-séquences gauche, centre et droite de $\sigma_{n'+2}$ séparés par les éléments $n'+1$ et $n'+2$
$\pi_{n'} = \pi_{n'-1} + \{n'\}$ désigne en fait la permutation où l'élément n' a été inséré en site $site_{n'}$.

```
pour chaque racine ρ_p faire
    go(ρ_p)
fin pour
```

Figure 3.1: Procédure *cons*

cons (cf. figure 3.1) construit la forêt des arbres de permutations, pour toutes les permutations racines demandées et générées.

```
Entrée : π_n

pour chaque site site_{n+1} faire
    si tstvalide(π_{n-1}, π_{n+1}, site_{n+1})
        alors le site site_{n+1} est actif
        sinon le site site_{n+1} est inactif
    fin si
fin pour
pour chaque site site_{n+1} actif faire
    go(π_{n+1})
fin pour
```

Figure 3.2: Procédure récursive *go*

go (cf. figure 3.2) construit récursivement un arbre de permutations.

Cet algorithme admet $\pi_n \in S_n(\tau, \ldots)$ en entrée, recherche dans un premier temps tous ses sites actifs, puis se ré-appelle dans un second temps pour toutes les permutations $\pi_{n+1} \in S_{n+1}(\tau, \ldots)$.
L'algorithme opère en deux temps afin de connaître entièrement les sites (actif ou inactif) de π_n avant d'étudier ceux de π_{n+1} ; c'est une condition nécessaire pour appliquer la proposition 2.3.

La récursion dans le second temps intègre exactement la proposition 2.1 en s'effectuant uniquement sur les sites actifs.

<u>*Entrées :*</u> $\pi_{n-1}, \pi_{n+1}, site_{n+1}$
<u>*Valeur retournée :*</u> $\pi_{n+1} \in ? S_{n+1}(\tau, \ldots)$

si le site $site_{n+1}$ est inactif dans π_{n-1}
    alors retourner faux
fin si
pour chaque permutation interdite $\tau_k \in \{\tau, \ldots\}$ **faire**
    si non *tst1interdit*($\pi_{n-1}, \pi_{n+1}, \tau_k$)
        alors retourner faux
    fin si
fin pour
retourner vrai

Figure 3.3: Fonction booléenne *tstvalide*

tstvalide (cf. figure 3.3) indique si π_{n+1} appartient ou non à $S_{n+1}(\tau, \ldots)$.

L'algorithme répond donc à la question : le site $site_{n+1}$ est-il actif, pour toutes les permutations interdites ?

Tout d'abord, π_n hérite des sites inactifs de π_{n-1}, conformément à la proposition 2.1. Ensuite, la démarche consiste à regarder une à une les permutations interdites — triées par nombre d'éléments croissant car les contraintes sont plus fortes pour les sous-séquences interdites de petite taille — en s'arrêtant dès que le site est détecté inactif.
En dernier ressort, le site est actif.

tst1interdit (cf. figure 3.4) indique si π_{n+1} appartient ou non à $S_{n+1}(\tau_k)$.

L'algorithme répond donc à la question : le site $site_{n+1}$ est-il actif, pour une des permutations interdites ?

La première étape code exactement le corollaire 2.2.
La deuxième étape consiste d'une part à appliquer la proposition 2.3 en divisant π_{n+1} et τ_k en trois sous-séquences chacune (respectivement $\pi^L_{n-1}, \pi^C_{n-1}, \pi^R_{n-1}$ et $\tau^L_{k-2}, \tau^C_{k-2}, \tau^R_{k-2}$ par leurs deux plus grands éléments), et d'autre part à vérifier les conditions de la remarque

<u>*Entrées :*</u> $\pi_{n-1}, \pi_{n+1}, \tau_k$
<u>*Valeur retournée :*</u> $\pi_{n+1} \in ? S_{n+1}(\tau_k)$

si l'ordre $n/n+1$ diffère de celui $k-1/k$
  alors retourner vrai
fin si
si $|\pi^L_{n-1}| < |\tau^L_{k-2}|$ **ou** $|\pi^C_{n-1}| < |\tau^C_{k-2}|$ **ou** $|\pi^R_{n-1}| < |\tau^R_{k-2}|$
  alors retourner vrai
fin si
retourner *tstdiff3*$(\pi^L_{n-1}, \pi^C_{n-1}, \pi^R_{n-1}, \tau^L_{k-2}, \tau^C_{k-2}, \tau^R_{k-2})$

Figure 3.4: Fonction booléenne *tst1interdit*

2.1, test qui recouvre entièrement la proposition 2.2.
Finalement, la troisième étape sous-traite le travail à *tstdiff3*.

<u>*Entrées :*</u> $\pi^L_{n-1}, \pi^C_{n-1}, \pi^R_{n-1}, \tau^L_{k-2}, \tau^C_{k-2}, \tau^R_{k-2}$
<u>*Valeur retournée :*</u> $\pi_{n+1} \in ? S_{n+1}(\tau_k)$

— non présenté —

Figure 3.5: Fonction booléenne récursive *tstdiff3*

tstdiff3 (cf. figure 3.5) indique si π_{n+1} appartient ou non à $S_{n+1}(\tau_k)$.

L'algorithme répond donc à la question : le site $site_{n+1}$ est-il actif, pour une des permutations interdites, les permutations étant divisées en trois sous-séquences ?

Cet algorithme code exactement la remarque 2.1. Il teste récursivement les différentes possibilités consistant à retrouver la sous-séquence interdite τ_{k-2} dans π_{n-1}, pour les trois sous-séquences respectives.
Dès qu'une sous-séquence de π_{n-1} est trouvée de forme τ_{k-2}, l'algorithme s'arrête en retournant **faux**. Par contre, une fois toutes les possibilités étudiées sans avoir rencontré de sous-séquence interdite, l'algorithme retourne **vrai**.

3.3 Eléments de la complexité de *forbid*

Cette section propose l'étude de la complexité des algorithmes les plus importants présentés dans la section 3.2.

L'objectif consiste à mesurer l'efficacité du test $\pi_{n+1} \in ? S_{n+1}(\ldots, \tau_k, \ldots)$ — c'est à dire l'insertion de l'élément $n+1$ dans $\pi_n \in S_n(\ldots, \tau_k, \ldots)$ — implémenté en prenant en

compte les différentes optimisations présentées dans le chapitre 2.
On note $s_{n'}$ pour $|\, S_{n'}(\ldots, \tau_k, \ldots) \,|$.

3.3.1 Complexité de *tstdiff3*

La complexité au pire de *tstdiff3* est donnée par

$$\begin{pmatrix} |\,\pi_{n-1}^L\,| \\ |\,\tau_{k-2}^L\,| \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} |\,\pi_{n-1}^C\,| \\ |\,\tau_{k-2}^C\,| \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} |\,\pi_{n-1}^R\,| \\ |\,\tau_{k-2}^R\,| \end{pmatrix}$$

avec $\begin{cases} |\,\pi_{n-1}^L\,| \ + |\,\pi_{n-1}^C\,| \ + |\,\pi_{n-1}^R\,| =|\,\pi_{n-1}\,| = n-1 \\ |\,\tau_{k-2}^L\,| \ + |\,\tau_{k-2}^C\,| \ + |\,\tau_{k-2}^R\,| =|\,\tau_{k-2}\,| = k-2 \end{cases}$
qui compte le nombre de sous-séquences de π_{n-1} formées de $k-2$ éléments, après le découpage en trois.
Ce nombre est également le nombre exact de sous-séquences testées quand l'algorithme retourne **vrai**.

Dans le pire des cas, un seul des ensembles $\tau_{k-2}^L, \tau_{k-2}^C, \tau_{k-2}^R$ est non vide et la sous-séquence correspondante de π_{n-1} contient tous les éléments.
Alors, la complexité au pire est de

$$\binom{n-1}{k-2} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{(k-2)^{k-\frac{3}{2}}.(n-k+1)^{n-k+\frac{3}{2}}} \text{ en } O\left(\frac{1}{\sqrt{k}} . \left(\frac{n}{k}\right)^{k-2}\right)$$

d'après la formule de Stirling et les notations de Landau, avec $k << n$.

Cette complexité au pire passe à $\binom{n-2}{k-3}.\binom{1}{1}$ quand un seul des trois ensembles est vide, et à $\binom{n-3}{k-4}.\binom{1}{1}.\binom{1}{1}$ quand aucun des trois ensembles n'est vide.

A titre de comparaison, l'algorithme qui ne tiendrait pas compte des nouvelles propositions optimisant *forbid* serait d'une complexité au pire de $\binom{n+1}{k}$.
Le gain obtenu est le rapport $\frac{k(k-1)}{(n+1)n}$.

Il faut cependant tempérer ces résultats.
En effet, nous travaillons actuellement essentiellement avec $k = 3$ ou 4, voire 5.
De plus, nous limitons souvent la hauteur de l'arbre à $N = 10$, voire 12.

Remarque : L'algorithme implémenté admet une optimisation supplémentaire.

Chaque permutation interdite stocke, pour chaque élément de τ_{k-2} sur $[k-2]$, la différence positive et négative avec la plus proche valeur des éléments d'indices inférieurs.

En effet, la recherche par *tstdiff3* des sous-séquences se fait dans l'ordre d'indice croissant et les différences signifient qu'il faut accepter un intervalle de valeurs suffisamment grand pour espérer trouver ultérieurement un élément qui puisse s'y insérer.

3.3.2 Complexité de *tst1interdit*

Le problème consiste ici à déterminer quand *tstdiff3* est effectivement appelé pour évaluer l'efficacité des deux tests préliminaires. Malheureusement, la réponse dépend des positions des éléments $n, n+1$ et $k-1, k$, information qu'il est difficile de connaître dans le cas général.

Toutefois, la proposition 2.2 reste valable et le nombre d'appels à *tstdiff3* est au plus égal au nombre d'appels à *tst1interdit* diminué de $k-1$.

3.3.3 Complexité de *tstvalide*

La complexité est ici mesurée par le nombre d'appels à *tst1interdit*, c'est à dire au pire le nombre de permutations interdites.

Toutefois, il ne faut pas considérer les sites inactifs hérités.
Ainsi, le nombre de sites à tester est globalement donné pour *tstvalide* et *go* par

$$\sum_{\pi_n \in S_n(\ldots,\tau_k,\ldots)} actif_{\pi_n}.(actif_{\pi_n}+1) \quad = \quad s_{n+1} + \sum_{\pi_n \in S_n(\ldots,\tau_k,\ldots)} (actif_{\pi_n})^2$$

où $actif_{\pi_n} \in [0; n+1]$ est le nombre de sites actifs de chaque permutation $\pi_n \in S_n(\ldots,\tau_k,\ldots)$.
La première formule résulte directement du corollaire 2.1 tandis que la seconde est sa re-écriture d'après la proposition 1.2.

En posant pour tous les sites actifs des π_n leurs bornes minimale et maximale, on obtient l'encadrement $[s_{n+1}\ ; s_{n+1} + s_n.(n+1)^2]$ pour la formule.

3.4 Bilan de *forbid*

L'intérêt de l'outil *forbid* est d'orienter les recherches, notamment en optant pour l'une des différentes sorties, choisie comme étant l'approche la plus simple du problème.

Cependant, si une sortie unique donne une bonne idée de la solution (jeu de règles ou cardinalité) selon l'information demandée, c'est plus souvent la corrélation de plusieurs sorties qui aiguille vers le résultat.

forbid, également interfacé avec *Druid*, a déjà subi plusieurs modifications visant à enrichir ses possibilités, et peut encore évoluer, en particulier par le rajout de nouvelles sorties.

Partie II

Deux résultats

Chapitre 4

$S_n^*(1432)$

Ce chapitre évalue $|\,S_n^*(1432)| = |\,S_n(1432, 2341, 3214, 4123)|$. Pour cela, on sera également amené à calculer $|\,S_n(123, 1432, 3214)|$.

4.1 Détermination de $|\,S_n^*(1432)\,|$

Cette section détermine les différentes contraintes à satisfaire et exprime $|\,S_n^*(1432)|$ en fonction de $|\,S_n(123, 1432, 3214)|$.

Théoreme 4.1 $|\,S_n^*(1432)| = 2.\,|\,S_n(123, 1432, 3214)|\ , \forall n \geq 6.$

4.1.1 Détermination des contraintes

Grâce à la proposition 2.4, ce problème se simplifie en n'étudiant que la moitié des cas à considérer, les autres étant construits par miroir des premières permutations obtenues.
Ainsi, posons $\pi \in S_n^*(1432)$ telle que $\pi^{-1}(n-1) < \pi^{-1}(n)$.
De plus, notons π^L, π^C, et π^R respectivement les éléments $\pi(1)$ à $\pi(\pi^{-1}(n-1)-1)$, $\pi(\pi^{-1}(n-1)+1)$ à $\pi(\pi^{-1}(n)-1)$, et $\pi(\pi^{-1}(n)+1)$ à $\pi(n)$, qui sont respectivement situés à gauche de $n-1$, entre $n-1$ et n, et à droite de n.
Cela se schématise ainsi :

$$\overbrace{\boxed{\quad\cdots\quad}}^{\pi^L}\boxed{n-1}\overbrace{\boxed{\quad\cdots\quad}}^{\pi^C}\boxed{\quad n\quad}\overbrace{\boxed{\quad\cdots\quad}}^{\pi^R} = \pi \in S_n^*(1432)$$

Notation :

- e^L, e^C, e^R sont des éléments quelconques respectivement des ensembles π^L, π^C, π^R
- e_i, e_j avec $i < j$ sont deux éléments tels que $\pi^{-1}(e_i) < \pi^{-1}(e_j)$
- E^+, E sont les deux éléments les plus grands de π : $\forall e \in \pi - \{E^+, E\}, e < E < E^+$
- $e_i^L, e_j^L, E^{+L}, E^L$ se définissent pareillement pour la sous-séquence π^L, ainsi que leurs équivalents pour π^C et π^R

En faisant jouer à $n-1$ et/ou à n un rôle par rapport aux sous-séquences interdites de π, on est amené à établir des contraintes résumées dans le lemme ci-dessous.

Lemme 4.1 *Les contraintes pour une permutation $\pi \in S_n^*(1432)$ sont :*

C1 $\forall e^L, \forall e^R, e^L < e^R$

C2 π^C *est formée d'au plus deux éléments croissants*

C3 π^L *et* π^R *ne doivent pas être respectivement de formes* 321 *et* 123

C4 *si* π^C *contient deux éléments* e_1^C *et* e_2^C, *et que* $|\pi^R| \geq 1$, *on doit alors vérifier* $e_2^C = n-2$ *et* $e_1^C < e^R$

C5.1 $|\pi^C| \geq 1$ *et* $|\pi^L| \geq 2 \Longrightarrow e^C > E^L$

C5.2 $|\pi^C| \geq 1$ *et* $|\pi^R| \geq 2 \Longrightarrow e^C > E^R$

C6 *si* π^L, π^C, π^R *ont tous au moins un élément, alors* $e^C < e^R$

C7 $|\pi^L| \geq 1 \Longrightarrow \pi^R$ *croissante*

De plus, il faut que $\pi - \{n-1, n\} \in S_{n-2}^*(1432)$.

Ces contraintes se vérifient ainsi :

C1 Sinon, la sous-séquence $(e^L, n-1, n, e^R)$ serait de forme 2341.

C2 π^C est formée d'éléments croissants pour que la sous-séquence $(n-1, e_1^C, e_2^C, n)$ ne soit pas de forme 3214. De plus, la sous-séquence 4123 interdit à π^C d'avoir plus de deux éléments à cause de (n, e_1^C, e_2^C, e_3^C).

C3 Cela afin d'éviter que les sous-séquences $(e_1^L, e_2^L, e_3^L, n-1)$ et (n, e_1^R, e_2^R, e_3^R) ne soient de formes 3214 et 4123.

C4 $\forall e^R$, il faut que cet élément ne soit ni inférieur à e_1^C ni supérieur à e_2^C, pour ne pas contenir respectivement les sous-séquences (e_1^C, e_2^C, n, e^R) et $(n-1, e_1^C, e_2^C, e^R)$ de formes 2341 et 4123. Par conséquent, et compte-tenu des contraintes C1 et C2, $e^L < e^R$ et $e_1^C < e^R < e_2^C \Longrightarrow e_2^C = n-2$.

C5 Pour éviter avec $(e_1^L, e_2^L, n-1, e^C)$ et (e_1^L, e_2^L, e^C, n) respectivement les formes 2341 et 3214, cela suppose que $\forall e_1^L, \forall e_2^L, e^C > \min\{e_1^L, e_2^L\} \Longleftrightarrow e^C > E^L$.

De même, pour éviter que $(n-1, e^C, e_1^R, e_2^R)$ et (e^C, n, e_1^R, e_2^R) ne soient de formes 4123 et 1432, il faut et il suffit de s'assurer que $e^C > E^R$.

C6 Afin d'éviter la forme 1432 avec $(e^L, n-1, e^C, e^R)$, il faut s'assurer que $\forall e^C, \forall e^R, e^C < e^R$ puisque la contrainte C1 vérifie déjà $e^L < e^R$.

C7 On aurait sinon deux éléments e_1^R, e_2^R avec $e_1^R > e_2^R$ tels que la sous-séquence $(e^L, n-1, e_1^R, e_2^R)$ serait de forme 1432.

□

Corollaire 4.1 *D'autres contraintes se déduisent du lemme 4.1 :*

(a) $|\pi^L| \geq 1 \Longrightarrow \pi^R$ *croissante et* $|\pi^R| \leq 2$

(b) $|\pi^C| = 2, |\pi^R| \geq 2$ *: cas impossible*

(c) $|\pi^L| \geq 1, |\pi^C| = 1, |\pi^R| \geq 2$ *: cas impossible*

(d) $|\pi^L| \geq 1, |\pi^C| = 2, |\pi^R| \geq 1$ *: cas impossible*

Ces nouvelles contraintes se vérifient ainsi :

(a) Les contraintes C3 et C7, pour $|\pi^L| \geq 1$, demandent que π^R soit croissante, et donc de taille 2 au plus pour ne pas être de forme 123.

(b) Les contraintes C2, C4 et C5.2 imposent à e_1^C d'être à la fois inférieur à e^R et supérieur à E^R.

(c) Les contraintes C6 et C5.2 impliquent que e^C soit à la fois inférieur à e^R et supérieur à E^R.

(d) Les contraintes C4 et C6 exigent que $e_2^C = n-2$ soit inférieur à e^R, tout en étant le plus grand élément de $\pi - \{n-1, n\}$.

□

Le tableau suivant rassemble les différentes contraintes à satisfaire :

<table>
<tr><th></th><th>$\pi^R \in S(123)$
$|\pi^R| \geq 3$</th><th>$|\pi^R| = 2$</th><th>$|\pi^R| = 1$</th><th>$|\pi^R| = 0$</th></tr>
<tr><td>$\pi^L \in S(321)$
$|\pi^L| \geq 2$</td><td rowspan="2">(a)
impossible</td><td rowspan="2">$|\pi^C| = 0(b,c)$
$\pi^R \nearrow (a)$
$C1$</td><td>$|\pi^C| \leq 1(d)$
$C1, C5.1, C6$</td><td>$|\pi^C \nearrow| \leq 2$
$C5.1$</td></tr>
<tr><td>$|\pi^L| = 1$</td><td>$|\pi^C| \leq 1(d)$
$C1, C6$</td><td rowspan="2">$|\pi^C \nearrow| \leq 2$</td></tr>
<tr><td>$|\pi^L| = 0$</td><td colspan="2">$|\pi^C| \leq 1(b)$
$C5.2$</td><td>$|\pi^C \nearrow| \leq 2$
$C4$</td></tr>
</table>

4.1.2 Evaluation de $|S_n^*(1432)|$

Notations et remarques préliminaires

Posons :

- $s_n = |S_n^*(1432)|$
- $S'_n = S_n(123, 1432, 3214)$ et $s'_n = |S'_n|$ (avec $s'_0 = 1$)
- $S''_n = S_n(123, 1432, 3214)$ ayant tous les éléments à gauche de n qui croissent, et $s''_n = |S''_n|$

D'après la proposition 1.1, $S_n(123) \cap S_n^*(1432) = S'_n$.

De plus, d'après la propriété 1.1 du miroir, $|\, S_n(321, 2341, 4123)| = s'_n$. Cela s'applique également aux permutations de $S_n(321, 2341, 4123)$ dont tous les éléments à droite de n décroissent ; leur nombre est s''_n.

Calcul de s''_n et premières valeurs de s_n, s'_n, s''_n

Soit $\pi \in S''_n$.
On a $s''_0 = 0$, $s''_1 = 1$, et $\forall n \geq 2, s''_n = s'_{n-1} + s'_{n-2} + s''_{n-2}$
En effet, s''_n vaut :

$$\begin{cases} s'_{n-1} & \text{si } \pi(1) = n \\ s'_{n-2} & \text{si } \pi(1) = n-1 \text{ et } \pi(2) = n \\ s''_{n-2} & \text{si } \pi(1) = n-2 \text{ et } \pi(2) = n \\ \text{les autres cas sont impossibles} & \end{cases}$$

Le troisième terme de la récurrence est s''_{n-2} puisque la sous-séquence des éléments $\pi(3)$ à $\pi(\pi^{-1}(n-1)-1)$ doit être croissante, pour que $(n-2, e''_1, e''_2, n-1)$ ne soit pas de forme 3214.

On obtient finalement :

$$\forall n \geq 1, s''_n = \sum_{i=0}^{n-1} s'_i$$

Les premières valeurs de s_n, s'_n, s''_n sont les suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_n		1	2	6	20	54	116	262	590	1324	2974
s'_n	1	1	2	5	12	26	58	131	295	662	1487
s''_n	0	1	2	4	9	21	47	105	236	531	1193

Les différents cas à considérer

Les différents cas à envisager pour $n \geq 6$ sont donnés ci-dessous en précisant le nombre de possibilités et les conditions à satisfaire, respectivement avant et après la parenthèse ouvrante.

On note $s'_{n-i \geq j}$ les nombres s'_{n-i} à satisfaire pour $n \geq i + j$.

- $|\,\pi^L| = 0, |\,\pi^C| = 0$

  $$s'_{n-2\geq 0} \left(\begin{array}{l} \pi(1) = n-1, \pi(2) = n \\ \pi(3..n) \in S_{n-2\geq 0}(123, 3214, 1432) \end{array} \right.$$

- $|\,\pi^L| = 0, |\,\pi^C| = 1, |\,\pi^R| \geq 2$

  $$s'_{n-3\geq 2} \left(\begin{array}{l} \pi(1) = n-1, \pi(2) = n-2, \pi(3) = n \\ \pi(4..n) \in S_{n-3\geq 2}(123, 3214, 1432) \end{array} \right.$$

  $$s''_{n-3\geq 2} \left(\begin{array}{l} \pi(1) = n-1, \pi(2) = n-3, \pi(3) = n \\ \pi(4..n) \in S_{n-3\geq 2}(123, 3214, 1432), \nearrow \text{ à gauche} \end{array} \right.$$

- $|\pi^L| \neq 0, |\pi^C| = 0, |\pi^R| = 0$

$$s'_{n-2\geq 1}\left(\begin{array}{l}\pi(n-1)=n-1, \pi(n)=n\\ \pi(1..n-2)\in S_{n-2\geq 1}(321,2341,4123)\end{array}\right.$$

- $|\pi^L| \neq 0, |\pi^C| = 0, |\pi^R| = 1$

$$s'_{n-3\geq 1}\left(\begin{array}{l}\pi(n-2)=n-1, \pi(n-1)=n, \pi(n)=n-2\\ \pi(1..n-3)\in S_{n-3\geq 1}(321,2341,4123)\end{array}\right.$$

- $|\pi^L| \neq 0, |\pi^C| = 0, |\pi^R| = 2$

$$s'_{n-4\geq 1}\left(\begin{array}{l}(\pi(n-3),\pi(n-2),\pi(n-1),\pi(n))=(n-1,n,n-3,n-2)\\ \pi(1..n-4)\in S_{n-4\geq 1}(321,2341,4123)\end{array}\right.$$

- $|\pi^L| \neq 0, |\pi^C| = 2, |\pi^R| = 0$

$$s'_{n-4\geq 2}\left(\begin{array}{l}(\pi(n-3),\pi(n-2),\pi(n-1),\pi(n))=(n-1,n-3,n-2,n)\\ \pi(1..n-4)\in S_{n-4\geq 2}(321,2341,4123)\end{array}\right.$$

$$s'_{n-5\geq 1}\left(\begin{array}{l}(\pi(n-4),\pi(n-3),\ldots,\pi(n))=(n-2,n-1,n-4,n-3,n)\\ \pi(1..n-5)\in S_{n-5\geq 1}(321,2341,4123)\end{array}\right.$$

$$s''_{n-4\geq 2}\left(\begin{array}{l}(\pi(n-3),\pi(n-2),\pi(n-1),\pi(n))=(n-1,n-4,n-2,n)\\ \pi(1..n-4)\in S_{n-4\geq 2}(321,2341,4123), \searrow \text{ à droite}\end{array}\right.$$

- $|\pi^L| \neq 0, |\pi^C| = 1, |\pi^R| = 1$

$$s'_{n-3\geq 2}\left(\begin{array}{l}\pi(n-2)=n-1, \pi(n-1)=n-2, \pi(n)=n\\ \pi(1..n-3)\in S_{n-3\geq 2}(321,2341,4123)\end{array}\right.$$

$$s''_{n-3\geq 2}\left(\begin{array}{l}\pi(n-2)=n-1, \pi(n-1)=n-3, \pi(n)=n\\ \pi(1..n-3)\in S_{n-3\geq 2}(321,2341,4123), \searrow \text{ à droite}\end{array}\right.$$

- $|\pi^L| \neq 0, |\pi^C| = 1, |\pi^R| = 0$

$$s'_{n-4\geq 2}\left(\begin{array}{l}(\pi(n-3),\pi(n-2),\pi(n-1),\pi(n))=(n-1,n-3,n,n-2)\\ \pi(1..n-4)\in S_{n-4\geq 2}(321,2341,4123)\end{array}\right.$$

$$s''_{n-4\geq 2}\left(\begin{array}{l}(\pi(n-3),\pi(n-2),\pi(n-1),\pi(n))=(n-1,n-4,n,n-2)\\ \pi(1..n-4)\in S_{n-4\geq 2}(321,2341,4123), \searrow \text{ à droite}\end{array}\right.$$

Calcul de $|S_n^*(1432)|$

Compte-tenu de ces différents cas et du fait que l'on n'en a étudié que la moitié en posant $\pi^{-1}(n-1) < \pi^{-1}(n)$, on en déduit :

$$\begin{array}{rcl}\forall n \geq 6, \quad \frac{1}{2}s_n & = & 2s'_{n-2}+3s'_{n-3}+3s'_{n-4}+s'_{n-5}+2s''_{n-3}+2s''_{n-4}\\ & = & 2s'_{n-2}+3s'_{n-3}+s'_{n-4}+s'_{n-5}+4\sum_{i=0}^{n-4} s'_i\end{array}$$

On vérifiera ultérieurement (cf. 4.2.3) que $\forall n \geq 6, s_n = 2s'_n$.

4.2 Détermination de $|S_n(123, 1432, 3214)|$

Cette section propose le jeu de règles de $T(123, 1432, 3214)$ et en donne la fonction génératrice.

4.2.1 Le jeu de règles de $T(123, 1432, 3214)$

Théoreme 4.2 *$T(123, 1432, 3214)$ a pour jeu de règles :*

$$\left\{\begin{array}{lll}(A,2) & & \\ (A,1) & \rightsquigarrow & (A,2) \\ (A,2) & \rightsquigarrow & (B,2),(A,3) \\ (B,2) & \rightsquigarrow & (A,1),(B,3) \\ (A,3) & \rightsquigarrow & (B,2),(A,3),(C,3) \\ (B,3) & \rightsquigarrow & (B,2),(B,2),(A,3) \\ (C,3) & \rightsquigarrow & (A,1),(A,1),(B,3)\end{array}\right.$$

Lemme 4.2 *Les sites actifs sont les 1, 2, ou 3 premiers sites d'une permutation $\pi \in S_n(123, 1432, 3214)$.*

La proposition 2.2 permet d'affirmer que toute permutation π de $S'_n = S_n(123, 1432, 3214)$ admet au moins le site 1 comme site actif.
Aucune des sous-séquences interdites ne commence par son plus grand élément.

Si le site 2 est inactif, tous les sites supérieurs à 2 sont également inactifs.
En effet, d'après la proposition 2.2, c'est obligatoirement la sous-séquence 1432 qui a interdit le site 2. Il existe donc e de π (avec $\pi^{-1}(e) \geq 3$) tel que la sous-séquence $(\pi(1), \pi(2), e)$ est de forme 132. Les sites 3 à $n+1$ sont alors interdits car la sous-séquence $(\pi(1), \pi(2), n+1)$ serait de forme 123.

Le nombre de sites actifs est de trois au plus qui correspondent aux sites 1, 2, et 3. Supposons l'existence d'au moins trois sites actifs tels que les sites 1 et 2 sont actifs et au moins un autre site i d'actif. Or, pour ne pas être de forme 123 (où $n+1$ en site i serait associé à 3), la sous-séquence $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(i-1))$ doit être décroissante mais également de taille inférieure ou égale à deux pour ne pas être de forme 3214 (où $n+1$ en site i serait associé à 4). □

Lemme 4.3

1. *Le fils de la permutation $\pi \in S'_n$ a 2 sites actifs.*
2. *Les deux fils de la permutation $\pi \in S'_n$ ont (1 ou 2) et 3 sites actifs.*
3. *Les trois fils de la permutation $\pi \in S'_n$ ont (1 ou 2 ou 3) et (1 ou 2) et 3 sites actifs.*

1. Soit $\pi \in S'_n$ ayant 1 fils $\pi' \in S'_{n+1}$. On a $\pi'(1) = n+1$, et le site 1 d'actif. De plus, compte-tenu de la proposition 2.3, son site 2 est actif car la sous-séquence $(n+1, n+2, e_1, e_2)$ n'est pas de forme interdite.

2. Soit $\pi \in S'_n$ ayant 2 fils π' et $\pi'' \in S'_{n+1}$ en plaçant respectivement $n+1$ en site 2 et 1.

   - π' telle que $\pi'(2) = n+1$ admet au plus 2 sites actifs car la sous-séquence $(\pi'(1), n+1, n+2)$ où $n+2$ serait inséré en site 3 est de forme interdite 123. π' admet :
     - 1 site actif si $\pi'(1) \neq n$ à cause de la sous-séquence $(\pi'(1), n+2, n+1, n)$ de forme 1432
     - 2 sites actifs si $\pi'(1)$ vaut n puisque 2431 n'est pas une sous-séquence interdite
   - π'' telle que $\pi''(1) = n+1$ admet 3 sites actifs d'après la proposition 2.3

3. Soit $\pi \in S'_n$ ayant 3 fils π', π'' et $\pi''' \in S'_{n+1}$ en plaçant respectivement $n+1$ en site 3, 2 et 1.

   - π' telle que $\pi'(3) = n+1$, avec $\pi'(1) > \pi'(2)$, admet :
     - 1 site actif si $\pi'(1) \neq n$ à cause de la sous-séquence $(\pi'(1), n+2, n+1, n)$ de forme 1432 interdisant les sites 2 et 3
     - 2 sites actifs si $\pi'(1) = n$ et $\pi'(2) \neq n-1$ car la sous-séquence $(\pi'(2), n+2, n+1, n-1)$ de forme 1432 interdit le site 3, tandis que le site 2 est autorisé puisque $(n, n+2, n+1, e')$ n'est pas de forme interdite
     - 3 sites actifs si $\pi'(1) = n$ et $\pi'(2) = n-1$ puisque les sites 2 et 3 sont actifs ; ni $(n, n+2, n+1, e')$, ni $(n-1, n+2, n+1, e')$ n'est de forme interdite
   - π'' telle que $\pi''(2) = n+1$, a le site 3 d'inactif car $(\pi''(1), n+1, n+2)$ serait de forme 123, et admet donc au plus 2 sites actifs :
     - 1 site actif si $\pi''(1) \neq n$ à cause de la sous-séquence $(\pi''(1), n+2, n+1, n)$ de forme 1432 interdisant le site 2
     - 2 sites actifs si $\pi''(1) = n$ car aucune sous-séquence interdite n'est de forme 2431
   - π''' telle que $\pi'''(1) = n+1$ admet 3 sites actifs d'après la proposition 2.3

□

Le jeu de règles de $T(123, 1432, 3214)$ se déduit directement du lemme 4.3 en posant comme étiquette $(x_1, x_2; y)$ ainsi définie :

$$\begin{cases} x_1 & = & \text{position de la valeur } n & = & \pi^{-1}(n) \\ x_2 & = & \text{position de la valeur } n-1 & = & \pi^{-1}(n-1) \\ y & = & \text{nombre de fils} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} (1,x_2;2) & \\ (x_1,x_2;1) & \rightsquigarrow \quad (1,x_2;2) \\ (1,x_2;2) & \rightsquigarrow \quad (x_1\neq 1,x_2;2),(1,2;3) \\ (x_1\neq 1,x_2;2) & \rightsquigarrow \quad (x_1,x_2;1),(1,x_2\neq 2;3) \\ (1,2;3) & \rightsquigarrow \quad (x_1\neq 1,x_2;2),(1,2;3),(x_1\neq 1,x_2;3) \\ (1,x_2\neq 2;3) & \rightsquigarrow \quad (x_1\neq 1,x_2;2),(x_1\neq 1,x_2;2),(1,2;3) \\ (x_1\neq 1,x_2;3) & \rightsquigarrow \quad (x_1,x_2;1),(x_1,x_2;1),(1,x_2\neq 2;3) \end{cases}$$

Pour simplifier, il est possible de renommer $(A,1)$,$(A,2)$,$(B,2)$,$(A,3)$,$(B,3)$,$(C,3)$ respectivement pour $(x_1,x_2;1)$,$(1,x_2;2)$,$(x_1\neq 1,x_2;2)$,$(1,2;3)$, $(1,x_2\neq 2;3)$,$(x_1\neq 1,x_2;3)$.
□

4.2.2 La fonction génératrice de $|S_n(123,1432,3214)|$

Théoreme 4.3 *La fonction génératrice de* $|S_n(123,1432,3214)|$ *est* $\frac{1-x}{1-2x-x^3-x^4+x^5}$.

Le théorème 4.2 engendre les récurrences suivantes :

$$\begin{cases} \forall n\geq 2 & a_n = c_{n-1}+2f_{n-1} & \text{pour } (A,1) \\ & b_n = a_{n-1} & \text{pour } (A,2) \\ & c_n = b_{n-1}+d_{n-1}+2e_{n-1} & \text{pour } (B,2) \\ & d_n = b_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1} & \text{pour } (A,3) \\ & e_n = c_{n-1}+f_{n-1} & \text{pour } (B,3) \\ & f_n = d_{n-1} & \text{pour } (C,3) \\ \text{avec} & b_1=1, a_1=c_1=d_1=e_1=f_1=0 & \\ \text{et tel que} & s'_n = a_n+b_n+c_n+d_n+e_n+f_n & \end{cases}$$

En posant $g_n = e_n + e_{n-1}$, on déduit :

$$\begin{cases} f_n &= d_{n-1} \\ c_n &= d_n + e_{n-1} \\ e_n &= d_{n-1}+d_{n-2}+e_{n-2} \\ a_n &= d_{n-2}+e_n \\ b_n &= d_{n-3}+e_{n-1} \\ g_n &= g_{n-2}+d_{n-1}+2d_{n-2}+d_{n-3} \\ &= d_{n-1}+2\sum_{i=1}^{n-2} d_i \\ d_n &= d_{n-1}+d_{n-4}+e_{n-1}+e_{n-2} \\ &= d_{n-1}+d_{n-2}+d_{n-4}+2\sum_{i=1}^{n-3} d_i \\ &= 2d_{n-1}+d_{n-3}+d_{n-4}-d_{n-5}(\forall n\geq 6) \\ & \quad (d_1=0,d_2=1,d_3=1,d_4=2,d_5=5) \\ s'_n &= 2d_n+d_{n-1}+d_{n-2}+d_{n-3}+2e_n+2e_{n-1} \\ &= 2d_{n+1}+d_{n-1}+d_{n-2}-d_{n-3} \\ &= d_{n+2} \end{cases}$$

Soit $G(x)=\sum_{n\geq 0} s'_n x^n$ la fonction génératrice de $|S_n(123,1432,3214)|$.
On obtient :

$$(1-2x-x^3-x^4+x^5).G(x) = 1-x$$

□

Une autre approche consiste à résoudre

$$s'_n = |\, S_n(123, 1432, 3214) | = \sum_{i=1}^{6} v_n^i$$

avec $\forall n \geq 2, V_n = (v_n^1, v_n^2, v_n^3, v_n^4, v_n^5, v_n^6) = V_{n-1}.M = V_1.M^{n-1}$

$$\begin{cases} V_1 & = & (0,1,0,0,0,0) \\ M & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & = & (m^{i,j}) \end{cases}$$

v_n^i, pour i variant de 1 à 6, est le nombre de permutations de S'_n de $i^{\text{ème}}$ étiquette.
V_1 correspond à l'étiquette d'initialisation.
M, la matrice carrée d'ordre 6, représente les règles où chaque $m^{i,j}$ (i en lignes, j en colonnes) est égal au nombre de fois à appliquer la $j^{\text{ème}}$ règle à partir de la $i^{\text{ème}}$.

Exemple : la cinquième ligne de la matrice signifie que la $5^{\text{ème}}$ règle $(B,3)$ déclenche 2 fois la $3^{\text{ème}}$ règle $(B,2)$ et 1 fois la $4^{\text{ème}}$ règle $(A,3)$.

4.2.3 Simplification du calcul de $|\, S_n^*(1432)\, |$

Il reste maintenant à vérifier le résultat du théorème 4.1 :
$\forall n \geq 6, \frac{1}{2} s_n = |\, S_n^*(1432) | = 2s'_{n-2} + 3s'_{n-3} + s'_{n-4} + s'_{n-5} + 4 \sum_{i=0}^{n-4} s'_i$
Or, $s'_n = s'_{n-1} + s'_{n-2} + s'_{n-4} + 2 \sum_{i=0}^{n-3} s'_i$
$\implies \frac{1}{2} s_n = 2s'_n - 2s'_{n-1} - s'_{n-3} - s'_{n-4} + s'_{n-5}$
Comme $s'_n = 2s'_{n-1} + s'_{n-3} + s'_{n-4} - s'_{n-5} \implies$

$$\forall n \geq 6, s_n = 2s'_n$$

□

Une approche plus directe pour le théorème 4.1 serait de montrer que
$\forall n \geq 6, |\, S_n(123, 1432, 3214) | = |\, S_n(1432, 2341, 3214, 4123)[123] |$.
En effet, l'union de ces deux ensembles disjoints est exactement $|\, S_n^*(1432) |$, pour tout n.

Chapitre 5

$S_n^*(1324)$

Ce chapitre détermine le jeu de règles de $S_n^*(1324) = S_n(1324, 4231)$, puis en donne le cardinal.

5.1 Le jeu de règles de $T(1324, 4231)$

Théoreme 5.1 *$T(1324, 4231)$ a pour jeu de règles :*

$$\left\{\begin{array}{lll} (A,2,2) & & \\ (A,p,t) & \rightsquigarrow & (A,p,t+1),(A,t,t+1),(B,p,p+1),(B,p,p+2),\ldots,(B,p,t), \\ & & (E,3),(E,4),\ldots,(E,p) \\ (B,p,t) & \rightsquigarrow & (B,p,p+1),(B,p,p+2),\ldots,(B,p,t),(C,t-1,t+1),(D,1,2), \\ & & (E,3),(E,4),\ldots,(E,p) \\ (C,p,t) & \rightsquigarrow & (C,p,t+1),(D,p,p+2),(D,p,p+3),\ldots,(D,p,t),(D,1,2), \\ & & (E,3),(E,4),\ldots,(E,p+1) \\ (D,p,t) & \rightsquigarrow & (D,p,p+2),(D,p,p+3),\ldots,(D,p,t),(D,1,2),(D,1,2), \\ & & (E,3),(E,4),\ldots,(E,p+1) \\ (E,t) & \rightsquigarrow & (D,1,2),(E,3),(E,4),\ldots,(E,t),(E,t) \end{array}\right.$$

5.1.1 La démarche utilisée

La proposition 2.7 permet de diviser exhaustivement $S_n^*(1324)$ en quatre sous-ensembles disjoints, à savoir — après simplification due à la proposition 1.1 — $S_n(132, 231)$, $S_n(132, 4231)[231]$ et son miroir $S_n(231, 1324)[132]$, $S_n(1324, 4231)[132, 231]$.

Il faut alors remarquer qu'une permutation de $S(132, 4231)[231]$, ou de son miroir, a obligatoirement un ancêtre dans l'arbre $T(1324, 4231)$ qui appartient à $S(132, 231)$; il en va de même pour $S(1324, 4231)[132, 231]$ qui peut éventuellement avoir également un ancêtre intermédiaire appartenant à $S(132, 4231)[231]$ ou son miroir.

De plus, pour $n = 1$ et $n = 2$, seul l'ensemble $S_n(132, 231)$ admet des permutations ; $S_1^*(1324) = S_1(132, 231)$ et $S_2^*(1324) = S_2(132, 231)$.
De même, $S_3(1324, 4231)[132, 231] = \emptyset$.

La racine de $T(1324, 4231)$ est donc la permutation 1 de $S_1(132, 231)$.

$S_n(132, 231)$, de cardinalité 2^{n-1} [Simion-Schmidt 85] est composé d'une sous-séquence initiale décroissante et d'une sous-séquence finale croissante.
Grâce aux propositions 1.3 et 2.4, il est possible de toujours ramener les permutations de $S_n(132, 231)$ à des permutations π avec $\pi(n) = n$, soit en prenant la permutation telle quelle, soit en optant pour son miroir. Notons S'_n cet ensemble.

La démarche consiste alors à étudier S'_n en considérant toutes les possibilités d'insertion de l'élément $n + 1$ dans les sites actifs ; il est alors possible d'obtenir une permutation de S'_{n+1}, de $S_{n+1}(231, 1324)[132]$ ou de $S_{n+1}(1324, 4231)[132, 231]$.
De la même façon, l'insertion de l'élément $n + 1$ dans un site actif d'une permutation de $S_n(231, 1324)[132]$ donne uniquement une permutation soit de $S_{n+1}(231, 1324)[132]$, soit de $S_{n+1}(1324, 4231)[132, 231]$.
Enfin, l'insertion de l'élément $n + 1$ dans les sites actifs d'une permutation de $S_n(1324, 4231)[132, 231]$ génère exclusivement des permutations de $S_{n+1}(1324, 4231)[132, 231]$.

5.1.2 Les différentes structures valides des permutations

Lemme 5.1 *Toutes les permutations de $S^*_n(1324)$, après simplification du problème en remplaçant $S_n(132, 231)$ par S'_n, appartiennent à l'une des six structures ci-dessous, chacune suivie de son étiquette :*

$c{-}1$	$\searrow\ \nearrow\ 1..c{-}2$	$\nearrow\ c..n$					(A, c, t)
$c{-}1$	$\searrow\ \nearrow\ 1..c{-}2$	$\nearrow\!\!\!\!\searrow\ c..n$					(B, c, t)
$\searrow\ l{+}1..n$	$\searrow\ \nearrow\ 1..m{-}1$	l	$\nearrow\!\!\!\!\searrow\ m..l{-}1$				(C, m, t)
$\nearrow\!\!\!\!\searrow\ l{+}1..n$	$\searrow\ \nearrow\ 1..m{-}1$	l	$\nearrow\!\!\!\!\searrow\ m..l{-}1$				(D, m, t)
$\cdots$	X	n	$\searrow\ \nearrow\ 1..x{-}1$	$Y > X$	$\cdots$	*et son miroir*	(E, t)
$t = 2$ *et* $n \geq 4$							(F)

Légende :
$\alpha..\beta$ indique que la sous-séquence $\ni \{\alpha, \alpha + 1, \ldots, \beta\}$.
$\nearrow$ représente une sous-séquence croissante.
$\searrow$ représente une sous-séquence décroissante.
$\nearrow\!\!\!\!\searrow$ représente une sous-séquence autre que $\nearrow$ et $\searrow$, séparée en une sous-séquence croissante et une autre décroissante.

Les différents paramètres des étiquettes sont :

- t, le nombre de sites actifs
- $c = \pi(1) + 1$ avec $(\pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(c - 1)) \in S_{c-2}(132, 231)$
- $m = \min\{\pi(j), \pi(j + 1), \ldots, \pi(n)\}$ tel que le site j est actif tandis que le site $j + 1$ est inactif

- les états $A, B, \ldots, F$ sont ainsi définis :
  - A représente S'_n
  - B et C comptent deux fois les permutations de $S_n(231, 1324)[132]$
  - D, E et F sont les permutations de $S_n(1324, 4231)[132, 231]$ où une moitié est comptée deux fois tandis que l'autre moitié (miroirs des premières permutations) n'est pas comptabilisée

Les structures des états E et F ne sont pas davantage explicités; l'essentiel consiste surtout à remarquer que les états sont disjoints.
Il s'agit alors de vérifier que ces états constituent effectivement $S^*_n(1324)$.

Insertion de l'élément $n+1$ dans chaque structure

Notons $\pi_{n+1} \in S^*_{n+1}(1324)$ la permutation obtenue après insertion dans la permutation $\pi \in S^*_n(1324)$ de l'élément $n+1$ en site $i = \pi^{-1}_{n+1}(n+1)$.

Une remarque préliminaire est utile pour simplifier les démonstrations. Compte-tenu de la proposition 2.3, et soit i' le site d'insertion de l'élément $n+2$ dans la permutation π_{n+1}, ce site est inactif quand :

- $i' \leq i$ et $\exists e^C, e^R$ avec $i' \leq \pi^{-1}_{n+1}(e^C) < i < \pi^{-1}_{n+1}(e^R)$ tels que $e^C > e^R$; alors, $(n+2, e^C, n+1, e^R)$ est de forme 4231
- $i' > i$ et $\exists e^L, e^C$ avec $\pi^{-1}_{n+1}(e^L) < i < \pi^{-1}_{n+1}(e^C) < i'$ tels que $e^L < e^C$; alors, $(e^L, n+1, e^C, n+2)$ est de forme 1324

Par conséquent, les sites i et $i+1$ sont toujours actifs; il n'y a aucun élément e^C entre $n+1$ et $n+2$ pouvant être associé au 2 des sous-séquences interdites.

Etudions maintenant les différentes permutations π_{n+1} possibles, et ce pour chaque état.

- La structure détaillée de π d'étiquette (A, c, t) est :

c–1	$\searrow\ \nearrow$ 1..c–2	$\nearrow$ $c..n$

avec $\begin{cases} \pi(1) = c-1 \\ (\pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(c-1)) \in S_{c-2}(132, 231) \\ \forall c \leq j \leq n, \pi(j) = j \end{cases}$

et $\begin{cases} n \geq 1 \\ 2 \leq c \leq n \\ t = n+1 \end{cases}$

Tous les sites sont actifs puisque π ne contient ni 132, ni 231.

Insertion de $n+1$ en site i dans π formant π_{n+1} :

– $i = n+1$

π_{n+1} est de structure A, ajoute un nouveau site actif, et $n+1$ vient participer à la sous-séquence croissante débutant avec c.

L'étiquette de π_{n+1} est donc $(A, c, t+1)$.

– $i = 1$

π_{n+1} est de structure A, une fois effectué le miroir de la permutation ainsi obtenue, et ajoute un nouveau site actif. Par contre, la sous-séquence croissante débute maintenant avec $n+1 = \pi_{n+1}(n+1)$ puisque $\pi_{n+1}(1) = n$.

L'étiquette de π_{n+1} est alors $(A, t, t+1)$.

– $i \in [c; n]$

La sous-séquence croissante de c à n est rompue et π_{n+1} a pour structure B; toutefois, la valeur de c reste inchangée. Par contre, si les sites 1 à $i-1$ restent actifs ($e^C < i \leq e^R$), les sites $i+2$ à $n+2$ deviennent inactifs ($e^L = 1, e^C = i$).

L'étiquette de π_{n+1} est donc $(B, c, i+1)$.

Les étiquettes des π_{n+1} sont alors $(B, c, c+1), (B, c, c+2), \ldots, (B, c, t)$.

– $i \in [2; c-1]$

  * $i \leq \pi^{-1}(1)$

    Soit $x = \pi_{n+1}(i-1)$ et y le plus petit des éléments supérieurs à x d'indice supérieur à $\pi_{n+1}^{-1}(1)$ (avec $x < y \leq c$). Il s'agit de la structure E avec les sites 1 à $i-1$ inactifs ($e^C = x, e^R = 1$), les sites $i+2$ à $\pi_{n+1}^{-1}(y)$ actifs ($e^C < x \leq e^L \leq c-1$), et les sites $\pi_{n+1}^{-1}(y)+1$ à $n+2$ inactifs ($e^L = x, e^C = y$).

  * $i > \pi^{-1}(1)$

    Soit $x = \pi_{n+1}(i+1)$ et y le plus petit des éléments supérieurs à x d'indice inférieur à $\pi_{n+1}^{-1}(1)$ (avec $x < y \leq c-1$). Il s'agit toujours de la structure E avec les sites 1 à $\pi_{n+1}^{-1}(y)$ inactifs ($e^C = y, e^R = x$), les sites $\pi_{n+1}^{-1}(y)+1$ à $i-1$ actifs ($e^C < x \leq e^R$), et les sites $i+2$ à $n+2$ inactifs ($e^L = 1, e^C = x$).

L'étiquette de π_{n+1} est dans les deux cas $(E, x+1)$. En effet, le nombre de sites actifs est $1 + \mid i - \pi_{n+1}^{-1}(y) \mid$, et les éléments de π_{n+1} encadrés par $n+1$ et y, exactement de structure $S_{x-1}(132, 231)$, sont $\{1, 2, \ldots, x-1\}$.

Les étiquettes des π_{n+1} sont alors $(E, 3), (E, 4), \ldots, (E, c)$.

- La structure détaillée de π d'étiquette (B, c, t) est :

$c{-}1$	$\searrow \quad \nearrow \quad 1..c{-}2$	$\nearrow \quad c..t{-}2$	n	$\{\times, \searrow, \nearrow\} \quad t{-}1..n{-}1$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \pi(1) = c-1 \\ (\pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(c-1)) \in S_{c-2}(132, 231) \\ \forall c \leq j \leq t-2, \pi(j) = j \\ \pi(t-1) = n \\ (\pi(t), \pi(t+1), \ldots, \pi(n)) \ni \{t-1, t, \ldots, n-1\} \end{array} \right.$$

$$\text{et} \left\{ \begin{array}{l} n \geq 3 \\ 2 \leq c < t \leq n \end{array} \right.$$

Les éléments d'indice supérieur ou égal à t forment deux sous-séquences croissante et décroissante quelconques entremélées.

La sous-séquence $(1, n, \pi(t))$ est de forme 132.

Les sites actifs sont les sites 1 à t.

Insertion de $n+1$ en site i dans π formant π_{n+1} :

- $i \in [2; c-1]$
  Cette situation est exactement celle vue pour $i \in [2; c-1]$ de (A, c, t) de sorte que l'étiquette de π_{n+1} est $(E, x+1)$.
  Les étiquettes des π_{n+1} sont alors $(E, 3), (E, 4), \ldots, (E, c)$.
- $i \in [c; t-1]$
  La structure B est ici obtenue où c reste inchangé. Par contre, si les sites 1 à $i-1$ sont actifs ($e^C < i \leq e^R$), les sites de $i+2$ à $t+1$ deviennent inactifs ($e^L = 1, e^C = i$).
  L'étiquette de π_{n+1} est donc $(B, c, i+1)$.
  Les étiquettes des π_{n+1} sont alors $(B, c, c+1), (B, c, c+2), \ldots, (B, c, t)$.
- $i = t$
  Les sites 1 à $i-1$ deviennent inactifs ($e^C = n, e^R = n-1$).
  L'étiquette de π_{n+1} est (F).
- $i = 1$
  La structure C est ainsi générée avec tous les sites inchangés puisqu'il n'y a aucun élément pour remplir le rôle de e^L, et $m = \min\{t-1, t, \ldots, n-1\}$.
  L'étiquette de π_{n+1} est donc $(C, t-1, t+1)$.

- La structure détaillée de π d'étiquette (C, m, t) est :

$\searrow$ $l{+}1..m$	$\searrow$ $\nearrow$ $1..m{-}1$	l	$\{\times, \searrow, \nearrow\}$ $m..l{-}1$

avec $\begin{cases} \forall 1 \leq j \leq n-l, \pi(j) = n+1-j \\ (\pi(n-l+1), \pi(n-l+2), \ldots, \pi(n-l+m-1)) \in S_{m-1}(132, 231) \\ \pi(t-1) = l \\ (\pi(t), \pi(t+1), \ldots, \pi(n)) \ni \{m, m+1, \ldots, l-1\} \end{cases}$

et $\begin{cases} n \geq 4 \\ 2 \leq m < l < n \\ t = n-l+m+1 \end{cases}$

Les éléments d'indice supérieur ou égal à t forment deux sous-séquences croissante et décroissante quelconques entremélées.

La sous-séquence $(1, l, \pi(t))$ est de forme 132.

Le passage de B à C s'est effectué en insérant l'élément $l+1$ dans la permutation sur $[l]$.

Les sites actifs sont les sites 1 à t.

Insertion de $n+1$ en site i dans π formant π_{n+1} :

– $i = 1$

La structure C ainsi obtenue laisse m inchangé et ajoute un site actif.

L'étiquette de π_{n+1} est $(C, m, t+1)$.

– $i = n - l + m + 1$

Les sites 1 à $i-1$ deviennent inactifs ($e^C = l, e^R = l-1$).

L'étiquette de π_{n+1} est (F).

– $i \in [n-l+2; n-l+m-1]$

La situation est très proche de celle vue pour $i \in [2; c-1]$ de (A, c, t), mais cette fois-ci sur les éléments 1 à $m-1$.

L'étiquette de π_{n+1} est $(E, x+1)$, pour x prenant les valeurs 2 à $m-1$.

Les étiquettes des π_{n+1} sont $(E,3), (E,4), \ldots, (E,m)$.

– $i = n - l + m$

Les sites 1 à $n-l$ deviennent inactifs ($e^C = l+1, e^R = l$) ainsi que le site $t+1$ ($e^L = 1, e^C = l$), tandis que les sites $n-l+1$ à $n-l+m-1$ restent actifs ($e^C < m \leq e^R \leq l$).

L'étiquette de π_{n+1} est donc $(E, m+1)$.

– $i \in [2; n-l+1]$

La structure D est ainsi générée, avec m inchangé, et avec les sites 1 à $i-1$ inactifs ($e^C = \pi_{n+1}(i-1) = n+2-i, e^R = 1$) tandis que les autres sites sont inchangés ($e^C \leq n-i < e^L$).

L'étiquette de π_{n+1} est donc $(D, m, t-i+2)$.

Les étiquettes des π_{n+1} sont $(D,m,m+2), (D,m,m+3), \ldots, (D,m,t)$ puisque $t-i+2$ varie de t à $t-n+l+1$.

• La structure détaillée de π d'étiquette (D, m, t) est :

{⤩, ↘, ↗} $k..n{-}1$	n	↘ $l{+}1..k{-}1$	↘ ↗ $1..m{-}1$	l	{⤩, ↘, ↗} $m..l{-}1$

avec $$\begin{cases} (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n-k)) \ni \{k, k+1, \ldots, n-1\} \\ \pi(n-k+1) = n \\ \forall n-k+2 \leq j \leq n-l, \pi(j) = n+1-j \\ (\pi(n-l+1), \pi(n-l+2), \ldots, \pi(n-l+m-1)) \in S_{m-1}(132, 231) \\ \pi(n-l+m) = l \\ (\pi(n-l+m+1), \pi(n-l+m+2), \ldots, \pi(n)) \ni \{m, m+1, \ldots, l-1\} \end{cases}$$

et $$\begin{cases} n \geq 5 \\ 2 \leq m < l < k < n \\ t = k - l + m + 1 \end{cases}$$

Les éléments d'indice supérieur ou égal à $n-l+m+1$ forment deux sous-séquences croissante et décroissante quelconques entremélées. Il en va de même pour les éléments d'indice inférieur ou égal à $n-k$.

Les sous-séquences $(1, l, \pi(n-l+m+1))$ et $(\pi(n-k), n, 1)$ sont respectivement de formes 132 et 231.

Les sites actifs sont les sites $n-k+1$ à $n-l+m+1$.

Insertion de $n+1$ en site i dans π formant π_{n+1} :

- $i = n-k+1$
  Les sites supérieurs à $n-k+2$ deviennent inactifs ($e^L = n-1, e^C = n$).
  L'étiquette de π_{n+1} est (F).
- $i = n-l+m+1$
  Les sites inférieurs ou égal à $n-l+m$ deviennent inactifs ($e^C = l, e^R = l-1$).
  L'étiquette de π_{n+1} est (F).
- $i \in [n-l+2; n-l+m-1] \cup \{n-l+m\}$
  La situation est exactement celle décrite pour les mêmes valeurs i de (C, m, t).
  Les étiquettes des π_{n+1} sont $(E,3), (E,4), \ldots, (E,m)$ et $(E, m+1)$.
- $i \in [n-k+2; n-l+1]$
  La structure D ainsi générée, avec m inchangé, laisse les sites supérieurs à $i+1$ inchangés tandis que les sites inférieurs à i deviennent inactifs ($l+1 \leq e^C = \pi_{n+1}(i-1) \leq n, e^R = 1$).
  L'étiquette de π_{n+1} est donc $(D, m, m+n-l+3-i)$.
  Les étiquettes des π_{n+1} sont $(D,m,m+2), (D,m,m+3), \ldots, (D,m,t)$ puisque $m+n-l+3-i$ varie de $m+k-l+1 = t$ à $m+2$.

- La structure de π d'étiquette (E, t) est :
  $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \cdots & X & n & \searrow \quad \nearrow \quad 1..x{-}1 & Y & \cdots \\ \hline \end{array}$ ou son miroir,
  avec $(\pi(\pi^{-1}(n)+1), \pi(\pi^{-1}(n)+2), \ldots, \pi(\pi^{-1}(n)+x-1)) \in S_{x-1}(132, 231)$
  et $\begin{cases} n \geq 4 \\ t = x+1 \\ 2 \leq x \leq X < Y < n \end{cases}$
  Les sous-séquences (X, n, Y) et $(X, n, 1)$ sont respectivement de formes 132 et 231.
  Les sites actifs sont les sites $\pi^{-1}(n)$ à $\pi^{-1}(Y)$.
  Insertion de $n+1$ en site i dans π formant π_{n+1} :
  - $i = \pi^{-1}(n)$
    Les sites supérieurs à $i+1$ deviennent inactifs ($e^L = X, e^C = n$).
    L'étiquette de π_{n+1} est (F).
  - $i \in [\pi^{-1}(n)+2; \pi^{-1}(Y)-1]$
    La situation est très proche de celle vue pour $i \in [2; c-1]$ de (A, c, t), mais cette fois-ci sur les éléments 1 à $t-2$.
    L'étiquette de π_{n+1} est $(E, x+1)$, pour x prenant les valeurs 2 à $t-2$.
    Les étiquettes des π_{n+1} sont $(E,3), (E,4), \ldots, (E, t-1)$.

– $i = \pi^{-1}(Y)$
La structure est de nouveau E, avec le site $\pi_{n+1}^{-1}(n)$ inactif ($e^C = n, e^R = Y$) et tous les autres inchangés ($e^C < x \leq e^R$).
L'étiquette de π_{n+1} est (E, t).

– $i = \pi^{-1}(n) + 1$
La structure est encore E, avec le site $\pi_{n+1}^{-1}(n)$ inactif ($e^C = n, e^R = Y$) et tous les autres inchangés ($e^C < x \leq e^L$).
L'étiquette de π_{n+1} est (E, t).

- La structure de π d'étiquette (F) est telle que :

  – les deux seuls sites actifs ($t = 2$) sont $\pi^{-1}(n)$ et $\pi^{-1}(n) + 1$

  – $n \geq 4$

  – $\exists e_1, e_2$ avec $\pi^{-1}(e_1) < \pi^{-1}(n) < \pi^{-1}(e_2)$ tels que $(e_1, n, \pi(\pi^{-1}(n) + 1))$ et $(\pi(\pi^{-1}(n) - 1), n, e_2)$ sont des sous-séquences respectivement de formes 132 et 231.

  Insertion de $n + 1$ en site i dans π formant π_{n+1} :

  – $i = \pi^{-1}(n)$
  Le site $i + 2$ devient inactif ($e^L = \pi_{n+1}(i - 1), e^C = n$).
  L'étiquette de π_{n+1} est (F).

  – $i = \pi^{-1}(n) + 1$
  Le site $i - 1$ devient inactif ($e^C = n, e^R = \pi_{n+1}(i + 1)$).
  L'étiquette de π_{n+1} est (F).

Afin de valider (par récurrence) le lemme 5.1, il faut et il suffit de constater que chaque transition entre deux états différents de π à π_{n+1} lui donne effectivement la structure stipulée, et qu'il en va de même lorsque l'on passe d'un état vers lui-même. □

Le jeu de règles se déduit immédiatement de la démonstration du lemme 5.1 en reprenant chaque transition.
Toutefois, il faut renommer les paramètres c et m en p, et remplacer (F) par $(D, 1, 2)$. Cette dernière opération consiste à satisfaire l'ensemble d'équations $\{t = 2\ ; p + 2 > t\ ; 3 > p + 1\}$ pour pouvoir effectuer le remplacement dans (D, p, t). □

5.2 Calcul de $|S_n^*(1324)|$

Théoreme 5.2 $\forall n \geq 1$,
$|S_n^*(1324)| = 2 + \frac{1}{3}(n^3 - 18n^2 + 59n - 138).2^{n-5} + ((1 + \frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1} - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}).2^{n-\frac{5}{2}}$

Les récurrences se déduisent du théorème 5.1, en considérant les membres gauches comme l'étape $n-1$ et les membres droits comme l'étape n.

Toutefois, il faut remarquer que la première règle (A,p,t) satisfait la relation $t=n+1$. De plus, le cas $(D,1,2)$ est ici assimilé à une nouvelle règle.
On note les récurrences $a_{n,p}$, $b_{n,t,p}$, $c_{n,t,p}$, $d_{n,t,p}$, $e_{n,t}$, et f_n respectivement pour (A,p,t), (B,p,t), (C,p,t), $(D,p,t>2)$, (E,t), et $(D,1,2)$. Les conditions initiales $(n=1)$ sont $a_{1,2}=1$ pour $(A,2,2)$, toutes les autres valeurs étant nulles.
On obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
a_{1,2} & = & 1 & \\
a_{2,2} & = & 2 & \\
a_{n,p} & = & a_{n-1,p} & n \geq 3, 2 \leq p \leq n-1 \\
a_{n,n} & = & \sum_{p=2}^{n-1} a_{n-1,p} & \\
 & = & a_{n-1} & n \geq 3 \\
b_{n,t,p} & = & a_{n-1,p} + \sum_{\vartheta=t}^{n-1} b_{n-1,\vartheta,p} & n \geq 3, 2 \leq p < t \leq n \\
c_{n,p+2,p} & = & \sum_{\varpi=2}^{p} b_{n-1,p+1,\varpi} & n \geq 4, 2 \leq p \leq n-2 \\
c_{n,t,p} & = & c_{n-1,t-1,p} & n \geq 5, 5 \leq p+3 \leq t \leq n \\
d_{n,t,p} & = & \sum_{\vartheta=t}^{n-1} c_{n-1,\vartheta,p} + \sum_{\vartheta=t}^{n-2} d_{n-1,\vartheta,p} & n \geq 5, 4 \leq p+2 \leq t \leq n-1 \\
e_{n,t} & = & \sum_{\varpi=t}^{n-1} a_{n-1,\varpi} & \\
 & & + \sum_{\varpi=t}^{n-2} \sum_{\vartheta=\varpi+1}^{n-1} b_{n-1,\vartheta,\varpi} & \\
 & & + \sum_{\varpi=t-1}^{n-3} \sum_{\vartheta=\varpi+2}^{n-1} c_{n-1,\vartheta,\varpi} & \\
 & & + \sum_{\varpi=t-1}^{n-4} \sum_{\vartheta=\varpi+2}^{n-2} d_{n-1,\vartheta,\varpi} & \\
 & & + e_{n-1,t} + \sum_{\vartheta=t}^{n-2} e_{n-1,\vartheta} & n \geq 4, 3 \leq t \leq n-1 \\
f_n & = & b_{n-1} + c_{n-1} + 2d_{n-1} + e_{n-1} + 2f_{n-1} & n \geq 4
\end{array}\right.$$

...en ayant posé :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
a_n & = & \sum_{p=2}^{n} a_{n,p} \\
b_n & = & \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{t=p+1}^{n} b_{n,t,p} \\
c_n & = & \sum_{p=2}^{n-2} \sum_{t=p+2}^{n} c_{n,t,p} \\
d_n & = & \sum_{p=2}^{n-3} \sum_{t=p+2}^{n-1} d_{n,t,p} \\
e_n & = & \sum_{t=3}^{n-1} e_{n,t}
\end{array}\right.$$

Alors, $s_n = |S_n^*(1324)| = a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n$.

En résolvant successivement chacune des récurrences, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
a_{1,2} & = & 1 & \\
a_{n,2} & = & 2 & n \geq 2 \\
a_{n,p} & = & 2^{p-2} & n \geq 3, 3 \leq p \leq n \\
a_n & = & 2^{n-1} & n \geq 1 \\
b_{n,t,2} & = & 2^{n-t+1} & n \geq 3, 3 \leq t \leq n \\
b_{n,t,p} & = & 2^{n-t+p-2} & n \geq 4, 3 \leq p < t \leq n \\
b_n & = & (n-2).2^{n-2} & n \geq 2 \\
c_{n,t,p} & = & 2^{n-t+p-1} & n \geq 4, 4 \leq p+2 \leq t \leq n \\
c_n & = & (n-4).2^{n-2}+2 & n \geq 2 \\
d_{n,t,p} & = & (n-t).2^{n-t+p-2} & n \geq 5, 4 \leq p+2 \leq t \leq n-1 \\
d_n & = & (n^2-9n+22).2^{n-4}-2 & n \geq 2 \\
e_{n,t} & = & [(1+\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-t+2}+(1-\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-t+2} & \\
 & & +(t-3-n)].2^{n-3} & n \geq 4, 3 \leq t \leq n-1 \\
e_n & = & [2\sqrt{2}((1+\frac{1}{\sqrt{2}})^n-(1-\frac{1}{\sqrt{2}})^n) & \\
 & & -(n^2+n+2)].2^{n-4} & n \geq 1 \\
f_n & = & 2+[(1+\frac{1}{\sqrt{2}})^n+(1-\frac{1}{\sqrt{2}})^n].2^{n-3} & \\
 & & +\frac{1}{3}(n^3-18n^2+71n-162).2^{n-5} & n \geq 2
\end{array}\right.$$

$\square$

Corollaire 5.1 $|S_n(132,4231)| = 1+(n-1).2^{n-2}$

Grâce à la proposition 2.7, et comme $|S_n(132,231)| = a_n$, on a :
$b_n + c_n = 2.\,|S_n(132,4231)[231]| = 2.(|S_n(132,4231)| - a_n)$ $\square$

En fait, il était possible de calculer a_n, b_n, c_n, d_n directement à partir des structures des permutations données dans la section 5.1.2 :

$$\left(\begin{array}{lcl}
a_n & = & |S'_n| = |S_n(132,231)| = 2^{n-1} \\
b_n & = & 2.\sum_{c=2}^{n-1} |S_{c-2}(132,231)|\ 2^{(n-c+1)-1} \\
c_n & = & 2.\sum_{m=2}^{n-2} |S_{m-1}(132,231)|\ \sum_{l=m+1}^{n-1} 2^{(l-m)-1} \\
d_n & = & 2.\sum_{m=2}^{n-3} |S_{m-1}(132,231)|\ \sum_{l=m+1}^{n-2} 2^{(l-m)-1} \sum_{k=l+1}^{n-1} 2^{(n-k)-1}
\end{array}\right.$$

Chapitre 6

Spéculations

Ce chapitre expose, sans les résoudre, plusieurs problèmes.

Proposition 6.1
$S_n(\iota_k) = \bigcup_{2\leq j\leq k} S_n(\iota_j)[\iota_{j-1}]$, *où* $\iota_n = (1, 2, \ldots, n)$ *est la permutation croissante sur* n.

D'après les propositions 2.7 et 1.1, $S_n(\iota_k) = S_n(\iota_{k-1}) \cup S_n(\iota_k)[\iota_{k-1}]$.
Il suffit alors d'appliquer successivement ce processus. □

A. Regev a donné [Regev 81] un équivalent asymptotique :
$|S_n(\iota_k)| \sim \alpha_k.\frac{(k-1)^{2n}}{n^{(k^2-2k)/2}}$ où α_k est une constante.
Cette décomposition de $S_n(\iota_k)$ permet peut-être d'aborder ce problème selon une nouvelle approche.

Remarque : $|S_n(12)[1]| = 1$ et $|S_n(123)[12]| = c_n - 1$.

Conjecture 6.1 $T(3124) \cong T(2413)$.

Il est aisé de vérifier que $T(1234) \ncong T(1324) \ncong T(1342) \ncong T(1423) \ncong T(1432) \ncong T(2314) \ncong T(3214)$ en construisant leurs arbres en limitant la hauteur jusqu'à rencontrer une différence entre chacun.

J. West a prouvé, [West 90] et [Babson-West 92], que $T(1234) \cong T(1243) \cong T(2143) \cong T(2134)$.

Z. Stankova a démontré [Stankova 92] que $T(2314) \cong T(2413)$.

Si on exclu les isomorphismes résultant de la proposition 1.3, il reste uniquement à montrer cette conjecture pour terminer toutes les bijections entre les arbres $T(\tau_4)$ où $\tau_4 \in S_4$.
Une méthode consisterait à vérifier que $T(3124)$ suit le même jeu de règles donné par Z. Stankova pour $T(2413)$.

Conjecture 6.2
$T(2413, 41\overline{3}52) \cong T(2413, 45\overline{3}12) \xleftrightarrow{-1,-} T(2413, 21\overline{3}54) \cong T(2413, 5\overline{1}324) \xleftrightarrow{-1,-} \cdots$

$\cdots T(2413, \overline{4}2315) \cong T(2314, \overline{4}2513) \stackrel{-,|}{\longleftrightarrow} T(1423, 3514\overline{2}) \cong T(3214, \overline{2}4135)$.
De plus, $T(2143, 1354\overline{2}) \cong T(2413, 1534\overline{2})$.
Enfin, $|S_n(1342, \overline{3}1254)|$ *et* $|S_n(1342, 425\overline{1}3)|$ *ont la même distribution.*

Le cardinal commun à tous ces ensembles est $\frac{2.(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!}$ qui compte les permutations triables par deux piles, conjecture 4.2.19 de [West 90] démontrée par [Zeilberger 92], et les permutations symétriques de [Dulucq-Gire-West 92], en bijection avec les *cartes non séparables.*

Une façon naturelle d'approcher cette conjecture consiste à déterminer les jeux de règles communs aux arbres isomorphes. Par contre, la relation avec les deux derniers ensembles doit faire intervenir une autre explication.

Question 6.1 *Actuellement, les principales techniques à notre disposition pour comprendre les permutations sans sous-séquence interdite sont les trois bijections standards et l'isomorphisme entre les arbres.*

Existe-t-il d'autres bijections aussi générales ?

Un exemple montrant l'insuffisance de nos techniques actuelles est la conjecture 6.2. Même si le cardinal est identique pour toutes ces permutations sans sous-séquence interdite, le graphe des bijections — obtenu par les opérations miroir, complément, inverse et par l'équivalence entre jeux de règles — n'est pas connexe.

Question 6.2 *Existe-t-il une méthode permettant de savoir à priori si un ensemble donné de permutations sans sous-séquence interdite admet un nombre fini d'étiquettes ?*

Par exemple, $S_n(123, 1432, 3214)$ fait partie de ceux-ci, contrairement à $S_n^*(1324)$ qui dépend de p et t.

Conclusion

Les ensembles de permutations sans sous-séquence interdite ont été étudiés par R. Simion et F. Schmidt [Simion-Schmidt 85] pour toutes les combinaisons de permutations interdites de taille 3. Le travail sur les restrictions simples et multiples de taille 4 a été commencé par J. West [West 90] et continué par Z. Stankova [Stankova 92]. Les deux résultats présentés dans les chapitres 4 et 5 contribuent à ces recherches ; ils permettent de clore le problème des classes des symétries complètes des sous-séquences interdites sur [4].

L'outil *forbid* a été d'une aide précieuse, notamment pour la conjecture sur laquelle S. Dulucq, S. Gire et moi-même travaillons actuellement. Il s'agit de mettre en bijection les permutations triables par deux piles de [West 90] et [Zeilberger 92], et les permutations symétriques de [Dulucq-Gire-West 92].

Les ensembles de permutations sans sous-séquence interdite constituent un domaine à part entière, qu'il s'agisse de déterminer leur cardinal ou les bijections les reliant deux à deux. En outre, la conjecture précédente met en relief l'existence de bijections entre un tel ensemble et un autre objet combinatoire.

Partie III

Annexes

Annexe A

Guide d'utilisation de forbid

A.1 Présentation générale

- Objectif : fournir des informations sur $T_N(\tau, \ldots)$
- Construction de l'arbre (ou de la forêt) de permutations :
  - sans sous-séquence interdite : avec aucune, une ou plusieurs permutations interdites, barrées ou non
  - de hauteur limitée
  - à partir d'une ou plusieurs permutations racines
- Production de deux familles de sorties :
  - des ventilations de $|S_n(\tau, \ldots)|$ selon un critère : le nombre de fils, de saillants, de descentes ou de montées, d'excédences, l'indice du plus grand élément
  - des représentations de l'arbre de permutations — arbre ASCII, export vers CABRI, mot parenthésé — ou des sommets — règles et table des fils —

A.2 Syntaxe

La description de la syntaxe s'appuie sur la notation BNF dont voici un extrait :

$\lhd$ *type* $\rhd$	désigne une chaîne de caractères du type indiqué
$\lhd$ *type* $\rhd *$	désigne une suite de $\lhd$ *type* $\rhd$ de longueur quelconque
$\lhd$ *type* $\rhd +$	désigne une suite de $\lhd$ *type* $\rhd$ de longueur 1 minimum
::=	indique que les expressions gauche et droite sont équivalentes
`Mot`	représente la chaîne de caractères `Mot`
[]	signale que ce qui est entre crochets est optionnel
{}	exprime un choix unique entre ce qui est situé entre accolades, séparé par des virgules
|	exprime un choix binaire entre ce qui est situé à gauche et à droite de la barre verticale

La syntaxe est alors :
$\lhd$ *commande* $\rhd$ ::=
forbid $\lhd$ *sorties* $\rhd$ [+] $\lhd$ *nmax* $\rhd$ $\lhd$ *p_interdite* $\rhd *$ $[-$ r[+] $\lhd$ *p_racine* $\rhd +]$
$[-$ f[$\lhd$ *fichier* $\rhd$]]

`forbid` : nom du programme exécutable.

$\lhd$ *sorties* $\rhd$ ::= $\{$a, c, d, e, f, i, m, p, r, s, S, t$\}*$ où chaque caractère désigne une sortie différente.

Un caractère incorrect est ignoré.

Chaque caractère répété n'est pris qu'une fois en compte.

[+] $\lhd$ *nmax* $\rhd$: limite la hauteur de l'arbre de permutations.

Soit ρ sur $[p]$ une des $\lhd$ *p_racine* $\rhd$.

L'arbre (ou la forêt) de toutes les permutations π contenant la sous-séquence ρ et appartenant à $S_n(\tau, \ldots)$ est généré :

- pour $\lhd$ *nmax* $\rhd$ ($\lhd$ *nmax* $\rhd$ entier naturel positif), $\forall n \in [p; \lhd$ *nmax* $\rhd]$
- pour $+ \lhd$ *nmax* $\rhd$ ($\lhd$ *nmax* $\rhd$ entier naturel), $\forall n \in [p; p + \lhd$ *nmax* $\rhd]$

$\lhd$ *p_interdite* $\rhd$ ::= $\lhd$ *perm* $\rhd$ | $\lhd$ *perm_barree* $\rhd$: sous-séquence interdite.

Cette permutation doit être de taille 3 minimum.

$-$ r[+] : précède la liste des $\lhd$ *p_racine* $\rhd$.

Par défaut, seule la permutation 1 sur [1] est considérée.

Le suffixe + demande, quand plusieurs permutations racines ont été demandées ou générées, à cumuler les tables (uniquement pour les sorties d,e,i,m,s,S,t). Par défaut, $-$ r+ si au moins une des $\lhd$ *p_interdite* $\rhd$ est une permutation barrée, $-$ r sinon.

$\lhd$ *p_racine* $\rhd$ ::= $\lhd$ *perm* $\rhd$: permutation racine demandée de l'arbre.

Cette permutation doit appartenir à $S(\tau, \ldots)$.

$[-$ f[$\lhd$ *fichier* $\rhd$]] : spécifie le fichier devant recevoir les sorties.

Par défaut, chaque sortie est dirigée vers un fichier prédéfini suffixé par `.res`.

$-$ f : les sorties se font à l'écran.

$-$ f $\lhd$ *fichier* $\rhd$: toutes les sorties sont cumulées dans ce même fichier.

$\lhd$ *fichier* $\rhd$: nom de fichier quelconque autorisé par le système d'exploitation.

$\lhd$ *perm* $\rhd$ ::= $\{$1, 2, …, 9, a, b, …, z$\}*$: une permutation.

$\lhd$ *perm_barree* $\rhd$: permutation barrée.

Reprend la définition de $\lhd$ *perm* $\rhd$ en préfixant chaque élément distingué par `-`.

Exemple : `forbid ta +3 2413 41-352 -r 1 321 12 -f resultat`

A.3 Sorties

`a` : créé l'arbre de permutations dans un fichier texte ASCII.

Soit ρ sur $[p]$ la racine de l'arbre de permutations; les permutations de $S_n(\tau, \ldots)$ sont représentées dans la $(n+1-p)^{\text{ème}}$ colonne, et le père d'une permutation est la première permutation rencontrée en remontant la colonne immédiatement à gauche.

Chaque permutation de l'arbre est donnée avec ses sites actifs (`_`) et inactifs (`.`), suivi de son nombre de fils (entre parenthèses).

Exemple : arbre ASCII de $S_n(123)$.

```
Commande : forbid a 4 123 -r 1 -f exemple
Nombre total de permutations = 22
_1_(2)   _2_1_(3)   _3_2_1_(4)   _4_3_2_1_(5)
                                 _3_4.2.1.(2)
                                 _3_2_4.1.(3)
                                 _3_2_1_4.(4)
                    _2_3.1.(2)   _4_2_3.1.(3)
                                 _2_4.3.1.(2)
                    _2_1_3.(3)   _4_2_1_3.(4)
                                 _2_4.1.3.(2)
                                 _2_1_4.3.(3)
         _1_2.(2)   _3_1_2.(3)   _4_3_1_2.(4)
                                 _3_4.1.2.(2)
                                 _3_1_4.2.(3)
                    _1_3.2.(2)   _4_1_3.2.(3)
                                 _1_4.3.2.(2)
```

`c` : arbre de permutations interfacé avec CABRI.

Un fichier texte, décrivant l'arbre de permutations, est généré. Le logiciel CABRI reconnait alors ce dernier, à condition de l'ouvrir en format texte.

Chaque permutation est donnée avec ses sites actifs (`_`) et inactifs (`.`) dans l'information *label*, et le nombre de fils renseigne l'information *valuation*.

Exemple : fichier à destination de CABRI pour $S_n(123)$.

La commande était `forbid c 3 123 -r 1 -f exemple`

```
CABRI Version 3.0, june 1990
alpha_num grid : -20
selection: 0
#vertices: 8 #edges: 7
```

```
0 degree: 2  1 5
coord.: 10 77 val.: 2 shape: round size: 3 offsets: 7 4
label: _1_ font: (Times) size: 12 face: (normal)
1 degree: 4  0 2 3 4
coord.: 110 40 val.: 3 shape: round size: 3 offsets: 7 4
label: _2_1_ font: (Times) size: 12 face: (normal)
2 degree: 1  1
coord.: 210 10 val.: 4 shape: round size: 3 offsets: 7 4
label: _3_2_1_ font: (Times) size: 12 face: (normal)
3 degree: 1  1
coord.: 210 40 val.: 2 shape: round size: 3 offsets: 7 4
label: _2_3.1. font: (Times) size: 12 face: (normal)
4 degree: 1  1
coord.: 210 70 val.: 3 shape: round size: 3 offsets: 7 4
label: _2_1_3. font: (Times) size: 12 face: (normal)
5 degree: 3  0 6 7
coord.: 110 115 val.: 2 shape: round size: 3 offsets: 7 4
label: _1_2. font: (Times) size: 12 face: (normal)
6 degree: 1  5
coord.: 210 100 val.: 3 shape: round size: 3 offsets: 7 4
label: _3_1_2. font: (Times) size: 12 face: (normal)
7 degree: 1  5
coord.: 210 130 val.: 2 shape: round size: 3 offsets: 7 4
label: _1_3.2. font: (Times) size: 12 face: (normal)
```

`p` : créé un mot parenthésé à partir de l'arbre de permutations.

Le mot parenthésé se définit récursivement, en parcourant l'arbre de permutations :

- si le sommet est une feuille, retourner le nombre de sites actifs (entre 0 et z)
- si le sommet est un noeud interne, retourner le mot concaténant une parenthèse ouvrante, les mots triés — l'ordre croissant des priorités est),0,1,. . .,z,(— de chaque fils, et une parenthèse fermante

Exemple : mot parenthésé de $S_n(123)$.

```
Commande : forbid p 4 123 -r 1 -f exemple
Nombre total de permutations = 22
(((23)(234))((23)(234)(2345)))
```

Remarque : Une transformation simple opérant sur le mot d'une feuille permet d'obtenir un mot de Dyck; il suffit de remplacer t le nombre de sites actifs par (x^t) où x est le mot ().

`r` : édite toutes les règles valuées distinctes deux à deux.

L'arbre de permutations est parcouru en regardant localement le nombre de fils t d'un sommet et pour chacun de ses fils, leur nombre de fils, respectivement $t_1, t_2, \ldots, t_t$.

On obtient alors la règle t `-->` $t_1, t_2, \ldots, t_t$ (avec $\forall i \in [1; t-1], t_i \leq t_{i+1}$).

Toutes les règles différentes rencontrées sont éditées, triées par ordre croissant sur t et sur les t_i.

Exemple : règles de $S_n(123)$.

```
Commande : forbid r 7 123 -r 1 -f exemple
Nombre total de permutations = 625
#fils --> #fils de tous les successeurs
2 -->  2  3
3 -->  2  3  4
4 -->  2  3  4  5
5 -->  2  3  4  5  6
6 -->  2  3  4  5  6  7
7 -->  2  3  4  5  6  7  8
#regles differentes comptees = 6
```

`f` : compte le nombre d'occurences du nombre de fils pour un arc de l'arbre de permutations.

Soit (t, t') le couple associé à un arc de l'arbre de permutations reliant π à π' ayant respectivement t et t' comme nombre de fils.

Cette sortie génère un tableau ainsi constitué :

- t en ordonnée, $1 \leq t \leq N$
- t' en abscisse, $0 \leq t' \leq t+1$
- une cellule, intersection de la ligne t et de la colonne t', compte le nombre d'occurences du couple (t, t') rencontrées dans l'arbre de permutations

Exemple : table des nombres de fils de $S_n(123)$.

```
Commande : forbid f 7 123 -r 1 -f exemple
Nombre total de permutations = 625
 (7) :   0   0   1   1   1   1   1   1   1
 (6) :   0   0   6   6   6   6   6   6   0
 (5) :   0   0  19  19  19  19  19   0   0
 (4) :   0   0  41  41  41  41   0   0   0
 (3) :   0   0  64  64  64   0   0   0   0
 (2) :   0   0  65  65   0   0   0   0   0
 (1) :   0   0   0   0   0   0   0   0   0
       (0) (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)
```

`t` : ventile $|S_n(\tau,\ldots)|$ selon le nombre de sites actifs (i.e. le nombre de fils).

Cette ventilation est donnée sous une forme tabulaire avec :

- en abscisse, le nombre d'éléments n des permutations pour $n \in [1;N]$
- en ordonnée, le nombre de sites actifs s des permutations pour $s \in [0;n+1]$
- une cellule, intersection de la ligne s et de la colonne n, compte le nombre de permutations $\pi \in S_n(\tau,\ldots)$ ayant exactement s sites actifs

Une ligne supplémentaire fournit $|S_n(\tau,\ldots)|$ en totalisant la colonne n.

Une table est générée pour chaque racine; toutefois, il est possible de cumuler toutes les tables en une seule.

Exemple : ventilation de $|S_n(123)|$ selon le nombre de sites actifs.

```
Commande : forbid t 10 123 -r 1 -f exemple
Nombre total de permutations = 23713
#fils sur les ordonnees
Sn= =1 =2 =5 =14 =42 =132 =429 =1430 =4862 =16796
11:  -  -  -   -   -    -    -     -     -      1
10:  -  -  -   -   -    -    -     -     1      9
 9:  -  -  -   -   -    -    -     1     8     44
 8:  -  -  -   -   -    -    1     7    35    154
 7:  -  -  -   -   -    1    6    27   110    429
 6:  -  -  -   -   1    5   20    75   275   1001
 5:  -  -  -   1   4   14   48   165   572   2002
 4:  -  -  1   3   9   28   90   297  1001   3432
 3:  -  1  2   5  14   42  132   429  1430   4862
 2:  1  1  2   5  14   42  132   429  1430   4862
 1:  0  0  0   0   0    0    0     0     0      0
 0:  0  0  0   0   0    0    0     0     0      0
    1: 2: 3:  4:  5:   6:   7:    8:    9:    10: [n]
```

`sSdmei` : ventilent $|S_n(\tau,\ldots)|$ respectivement selon le nombre de saillants droits et gauches, de descentes et montées, d'excédences, et l'indice du plus grand élément.

Ces notions sont ainsi définies pour $\pi \in S_n(\tau,\ldots)$:

- nombre de saillants droits :
  $|\{\pi(i), \forall i \in [1;n] \text{ tel que } \pi(i) > \pi(j), \forall j \in [i+1;n]\}|$
- nombre de saillants gauches :
  $|\{\pi(i), \forall i \in [1;n] \text{ tel que } \pi(i) > \pi(j), \forall j \in [1;i-1]\}|$
- nombre de descentes : $|\{\pi(i) > \pi(i+1), \forall i \in [1;n-1]\}|$
- nombre de montées : $|\{\pi(i) < \pi(i+1), \forall i \in [1;n-1]\}|$

- nombre de d'excédences : $|\{\pi(i) > i, \forall i \in [1; n]\}|$
- indice du plus grand élément : $\pi^{-1}(n)$

Les sorties sont en tout point identiques à celles de la table `t`, avec en ordonnée le critère demandé (en remplacement du nombre de sites actifs).

Exemple : ventilation de $|S_n(123)|$ selon le nombre de saillants gauches.

```
Commande : forbid S 10 123 -r 1 -f exemple
Nombre total de permutations = 23713
#saillants gauches sur les ordonnees
Sn= =1 =2 =5 =14 =42 =132 =429 =1430 =4862 =16796
11:  -  -  -   -   -    -    -     -     -      0
10:  -  -  -   -   -    -    -     -     0      0
 9:  -  -  -   -   -    -    -     0     0      0
 8:  -  -  -   -   -    -    0     0     0      0
 7:  -  -  -   -   -    0    0     0     0      0
 6:  -  -  -   -   0    0    0     0     0      0
 5:  -  -  -   0   0    0    0     0     0      0
 4:  -  -  0   0   0    0    0     0     0      0
 3:  -  0  0   0   0    0    0     0     0      0
 2:  0  1  3   9  28   90  297  1001  3432  11934
 1:  1  1  2   5  14   42  132   429  1430   4862
 0:  0  0  0   0   0    0    0     0     0      0
    1: 2: 3:  4:  5:   6:   7:    8:    9:    10: [n]
```

Deux scripts UNIX utilisant la commande `awk` offrent deux nouvelles sorties :

- $S_N(\tau, \ldots)$, obtenu à partir du format ASCII
- un mot de Dyck, obtenu à partir du mot parenthésé

Annexe B

Un catalogue des résultats

Ce chapitre propose un catalogue — inspiré de [West 92a] — des résultats actuellement connus sur les permutations sans sous-séquence interdite.

Remarque : La section B.3 fournit dans chaque cas la liste exhaustive des jeux de règles, donnés pour le premier représentant dans l'ordre lexicographique.

B.1 Sous-séquences interdites de taille quelconque

$S_n = n!$

$$\begin{cases} (2) \\ (t) \quad \rightsquigarrow \quad (t+1)^t \end{cases}$$

$S_n(\tau, \tau') = 0, \forall n \geq l.m+1$ avec $\tau = (1, 2, \ldots, l+1)$ et $\tau' = (m+1, \ldots, 2, 1)$
[Erdös-Szekeres 39]

$T(1, 2, \ldots, r, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_k) \cong T(r, \ldots, 2, 1, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_k)$
[West 90] pour $r = 2$,
[Babson-West 92] pour $r \geq 3$

B.2 Sous-séquences interdites de taille 2

$|S_n(12)| = |S_n(21)| = 1$

$$\begin{cases} (1) \\ (1) \quad \rightsquigarrow \quad (1) \end{cases}$$

B.3 Sous-séquences interdites de taille 3

B.3.1 Avec une restriction

$|S_n(\tau_3)| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = c_n =$ les nombres de Catalan, $\forall \tau_3 \in S_3$
de fonction génératrice $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

[Knuth 73]

$$\begin{cases} (2) & \\ (t) & \rightsquigarrow \quad (2),(3),\ldots,(t+1) \end{cases}$$

[West 90]

B.3.2 Avec deux restrictions

$|S_n(123,132)| = |S_n(132,213)| = |S_n(132,231)| = |S_n(132,312)| = 2^{n-1}$

[Rotem 81] pour $S_n(231,312)$,

[Simion-Schmidt 85] pour les autres

Les jeux de règles de $T(123,132)$, $T(123,213)$ et $T(132,312)$ sont respectivement :

$$\begin{cases} (2) & \\ (t) & \rightsquigarrow \quad (1)^{t-1},(t+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2) & \\ (2) & \rightsquigarrow \quad (2),(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A,2) & \\ (A,t) & \rightsquigarrow \quad (B,1),(B,2),\ldots,(B,t-1),(A,t+1) \\ (B,t) & \rightsquigarrow \quad (B,1),(B,2),\ldots,(B,t) \end{cases}$$

$|S_n(123,231)| = 1 + \binom{n}{2}$

[Simion-Schmidt 85]

Les jeux de règles de $T(123,231)$ et $T(123,312)$ sont respectivement :

$$\begin{cases} (A,2) & \\ (1) & \rightsquigarrow \quad (1) \\ (A,2) & \rightsquigarrow \quad (A,2),(B,2) \\ (B,2) & \rightsquigarrow \quad (1),(B,2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2) & \\ (1) & \rightsquigarrow \quad (1) \\ (t \geq 2) & \rightsquigarrow \quad (1)^{t-1},(t+1) \end{cases}$$

$|S_n(123,321)| = 0, \forall n \geq 5$

[Erdös-Szekeres 39] (cf. section B.1)

$$\begin{cases} (A,2) & \\ (A,2) & \rightsquigarrow \quad (B,2),(B,2) \\ (B,2) & \rightsquigarrow \quad (0),(C,2) \\ (C,2) & \rightsquigarrow \quad (0),(0) \end{cases}$$

B.3.3 Avec trois restrictions

$|S_n(123,132,213)| = f_{n+1}$ = les nombres de Fibonacci

$f_0 = 0$; $f_1 = 1$; $\forall n \geq 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

[Simion-Schmidt 85]

$$\left\{\begin{array}{lll}(2) & & \\ (1) & \rightsquigarrow & (2) \\ (2) & \rightsquigarrow & (1),(2)\end{array}\right.$$

$|S_n(123,132,231)| = |S_n(123,132,312)| = |S_n(123,231,312)| = |S_n(132,213,231)| = n$
[Simion-Schmidt 85]
Les jeux de règles de $T(123,132,231)$ et $T(123,132,312)$ sont respectivement :

$$\left\{\begin{array}{lll}(2) & & \\ (1) & \rightsquigarrow & (1) \\ (2) & \rightsquigarrow & (1),(2)\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}(2) & & \\ (t) & \rightsquigarrow & (0)^{t-1},(t+1)\end{array}\right.$$

$|S_n(123,321,\tau_3)| = 0, \forall n \geq 5, \forall \tau_3 \in S_3$
[Erdös-Szekeres 39] (cf. section B.1)

B.3.4 Avec quatre restrictions

$|S_n(123,321,\tau_3,\tau_3')| = 0, \forall n \geq 5, \forall \tau_3, \tau_3' \in S_3$
[Erdös-Szekeres 39] (cf. section B.1)

$|S_n(R)| = 2, \forall n \geq 2, \forall R \not\supset \{123,321\}$ sous-ensemble de quatre éléments distincts de S_3
[Simion-Schmidt 85]
Les jeux de règles de $T(123,132,213,231)$ et $T(123,132,213,312)$ sont respectivement :

$$\left\{\begin{array}{lll}(2) & & \\ (1) & \rightsquigarrow & (1) \\ (2) & \rightsquigarrow & (1),(1)\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}(2) & & \\ (2) & \rightsquigarrow & (0),(2)\end{array}\right.$$

B.3.5 Avec cinq restrictions

$|S_n(S_3 - \{123\})| = |S_n(S_3 - \{321\})| = 1, \forall n \geq 3$
[Simion-Schmidt 85]

$$\left\{\begin{array}{lll}(2) & & \\ (1) & \rightsquigarrow & (1) \\ (2) & \rightsquigarrow & (0),(1)\end{array}\right.$$

B.4 Sous-séquences interdites de taille 4

B.4.1 Avec une restriction

$T(1234) \cong T(1243) \cong T(2143)$
qui comptent les permutations vexilliaires.

$$\begin{cases} (2,2) & \\ (x,y) & \rightsquigarrow \quad (2,y+1),(3,y+1),\ldots,(x+1,y+1),(x,x+1),(x,x+2),\ldots,(x,y) \end{cases}$$

[West 90]

$T(1234) \cong T(3214)$

[Babson-West 92] (cf. section B.1)

$T(3142) \cong T(4132)$

$$\begin{cases} (1,2) & \\ (i_1,i_2,\ldots,i_k) & \rightsquigarrow \quad (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{i_s},l_s,l_{s+1},\ldots,l_k) \quad \forall s=1,2,\ldots,k \\ & \qquad \forall j=s,s+1,\ldots,k, \\ & \qquad l_j = \begin{cases} i_j & \text{si } i_j \leq j-s \\ i_j+1 & \text{si } j-s < i_j \leq i_s+j-s \\ i_s+1+j-s & \text{si } i_s+j-s < i_j \end{cases} \end{cases}$$

[Stankova 92]

B.4.2 Les sept classes des symétries complètes

$|S_n^*(1234)| = 0, \forall n \geq 10$

[Erdös-Szekeres 39] (cf. section B.1)

$|S_n^*(1243)| = 14n, \forall n \geq 6$

[Stankova 92]

$$\begin{cases} (A,2) & \\ (A,2) & \rightsquigarrow \quad (A,3),(A,3) \\ (B,2) & \rightsquigarrow \quad (0),(B,2) \\ (C,2) & \rightsquigarrow \quad (0),(0) \\ (A,3) & \rightsquigarrow \quad (B,3),(C,3),(A,4) \\ (B,3) & \rightsquigarrow \quad (B,2),(B,2),(D,3) \\ (C,3) & \rightsquigarrow \quad (B,2),(C,3),(E,3) \\ (D,3) & \rightsquigarrow \quad (0),(0),(D,3) \\ (E,3) & \rightsquigarrow \quad (0),(B,2),(D,3) \\ (A,4) & \rightsquigarrow \quad (C,2),(C,2),(B,4),(B,4) \\ (B,4) & \rightsquigarrow \quad (C,2),(C,2),(C,2),(B,4) \end{cases}$$

$|S_n^*(1324)| = 2 + \frac{1}{3}2^{n-5}(n^3-18n^2+59n-138) + 2^{n-\frac{5}{2}}((1+\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1} - (1-\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1})$

$$\begin{cases} (A,2,2) & \\ (A,p,t) & \rightsquigarrow \ (A,p,t+1),(A,t,t+1),(B,p,p+1),(B,p,p+2),\ldots,(B,p,t), \\ & \quad (E,3),(E,4),\ldots,(E,p) \\ (B,p,t) & \rightsquigarrow \ (B,p,p+1),(B,p,p+2),\ldots,(B,p,t),(C,t-1,t+1),(D,1,2), \\ & \quad (E,3),(E,4),\ldots,(E,p) \\ (C,p,t) & \rightsquigarrow \ (C,p,t+1),(D,p,p+2),(D,p,p+3),\ldots,(D,p,t),(D,1,2), \\ & \quad (E,3),(E,4),\ldots,(E,p+1) \\ (D,p,t) & \rightsquigarrow \ (D,p,p+2),(D,p,p+3),\ldots,(D,p,t),(D,1,2),(D,1,2), \\ & \quad (E,3),(E,4),\ldots,(E,p+1) \\ (E,t) & \rightsquigarrow \ (D,1,2),(E,3),(E,4),\ldots,(E,t),(E,t) \end{cases}$$

présenté dans le chapitre 5

$|S_n^*(1342)| = 2^n - 2, \forall n \geq 5$

[Stankova 92]

$$\begin{cases} (A,2) & \\ (A,2) & \rightsquigarrow \ (A,3),(A,3) \\ (B,2) & \rightsquigarrow \ (B,2),(B,2) \\ (A,3) & \rightsquigarrow \ (B,2),(B,3),(C,3) \\ (B,3) & \rightsquigarrow \ (0),(B,2),(B,2) \\ (C,3) & \rightsquigarrow \ (B,2),(B,2),(C,3) \end{cases}$$

$|S_n^*(1432)| = 2\,|S_n(123,1432,3214)|\ , \forall n \geq 6$

présenté dans le chapitre 4

$S_n^*(2143)$ est un mélange de deux sous-séquences croissante et décroissante

[Stankova 92]

$|S_n^*(2413)| = r_{n-1} =$ les nombres de Schröder

avec $r_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n-i} c_i$

de fonction génératrice $\frac{1-x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2x}$

de récurrence $r_0 = 1$ et $r_{n+1} = r_n + \sum_{i=0}^{n} r_i . r_{n-i}$

$$\begin{cases} (2) & \\ (t) & \rightsquigarrow \ (3),(4),\ldots,(t+1),(t+1) \end{cases}$$

[West 91]

B.4.3 Restrictions multiples

$|S_n(2341,3241)| = r_{n-1}$

[Dulucq-Gire 92]

$|S_n(3412,4231)|$ et $|S_n(3124,4213)|$

sont comptés par la fonction génératrice $\frac{1-5x+4x^2-2x^3C(x)}{1-6x+8x^2-4x^3} = \frac{x}{1-\frac{2x}{2-C(x)}}$

où $C(x)$ est la fonction génératrice des nombres de Catalan

[Haiman 91] pour $S_n(3412,4231)$,

[STANKOVA 92] pour $S_n(3124, 4213)$

B.5 Autres résultats

B.5.1 $S_n(\tau_3, \tau_4)$, avec $\tau_3 \in S_3$ et $\tau_4 \in S_4$

$T(123, 3214) \cong T(213, 1234) \cong T(213, 1243) \cong T(132, 3241)$
$T(123, 2143) \cong T(123, 2413) \cong T(132, 2314) \cong T(132, 2341)$
$T(132, 3412)$

de cardinal f_{2n-1}
de fonction génératrice $\frac{x(1-x)}{1-3x+x^2}$
[WEST 92b]
en bijection avec les animaux dirigés verticalement convexes
[DELEST-DULUCQ 87]

$|S_n(321, 1423)| = 3.2^{n-1} - \binom{n+1}{2} - 1$
[WEST 92b]

$|S_n(321, 2143)| = 2^{n+1} - \binom{n+1}{3} - 2n - 1$
[BILLEY-JOCKUSCH-STANLEY 91]

$|S_n(123, 4312)| = \binom{n}{4} + 2\binom{n}{3} + n$
[WEST 92b]

$|S_n(123, 4231)| = \binom{n}{5} + 2\binom{n}{4} + \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + 1$
[WEST 92b]

$|S_n(123, 4321)| = 0, \forall n \geq 7$
[ERDÖS-SZEKERES 39] (cf. section B.1)

$|S_n(132, 3214)|$ de fonction génératrice $\frac{(1-x)^3}{1-4x+5x^2-3x^3}$
[WEST 92b]

$|S_n(132, 4231)| = |S_n(132, 4312)| = 1 + (n-1)2^{n-2}$
$|S_n(132, 4231)|$ donné dans le chapitre 5,
[WEST 92b] pour $S_n(132, 4312)$

$|S_n(132, 4321)| = \binom{n}{4} + \binom{n+1}{4} + \binom{n}{2} + 1$
[WEST 92b]

B.5.2 Résultats divers

$|S_n(2341, 3\bar{5}241)| = |S_n(2413, 41\bar{3}52)| = \frac{2.(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!}$
comptent les permutations triables par deux piles et les permutations symétriques.

Cf. [SLOANE 73] référence 651
[ZEILBERGER 92] pour $S_n(2341, 3\bar{5}241)$,
[DULUCQ-GIRE-WEST 92] pour $S_n(2413, 41\bar{3}52)$

$S_n(41\bar{3}52, 25\bar{3}14)$ comptent les permutations de Baxter
Cf. [SLOANE 73] référence 652

$|S_n(123, 2\bar{4}13)| = m_n =$ les nombres de Motzkin
avec $m_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i$

$$\begin{cases} (2) & \\ (t) & \rightsquigarrow \quad (1), (2), \ldots, (t-1), (t+1) \end{cases}$$

[DULUCQ-GIRE 92]

$|S_n(123, 1432, 3214)|$ de fonction génératrice $\frac{1-x}{1-2x-x^3-x^4+x^5}$

$$\begin{cases} (A,2) & \\ (A,1) & \rightsquigarrow \quad (A,2) \\ (A,2) & \rightsquigarrow \quad (B,2), (A,3) \\ (B,2) & \rightsquigarrow \quad (A,1), (B,3) \\ (A,3) & \rightsquigarrow \quad (B,2), (A,3), (C,3) \\ (B,3) & \rightsquigarrow \quad (B,2), (B,2), (A,3) \\ (C,3) & \rightsquigarrow \quad (A,1), (A,1), (B,3) \end{cases}$$

présenté dans le chapitre 4

Annexe C

Quelques valeurs pour les trois bijections standards

C.1 Table des miroir, complément, inverse sur [3] et [4]

Cette section donne les permutations miroir, complément et inverse de toutes les permutations de S_3 et S_4.

$\pi \in S_3$	$\pi^{\rceil}$	π^{-}	π^{-1}
123	321	321	123
132	231	312	132
213	312	231	213
231	132	213	312
312	213	132	231
321	123	123	321

$\pi \in S_4$	$\pi^{|}$	π^{-}	π^{-1}
1234	4321	4321	1234
1243	3421	4312	1243
1324	4231	4231	1324
1342	2431	4213	1423
1423	3241	4132	1342
1432	2341	4123	1432
2134	4312	3421	2134
2143	3412	3412	2143
2314	4132	3241	3124
2341	1432	3214	4123
2413	3142	3142	3142
2431	1342	3124	4132
3124	4213	2431	2314
3142	2413	2413	2413
3214	4123	2341	3214
3241	1423	2314	4213
3412	2143	2143	3412
3421	1243	2134	4312
4123	3214	1432	2341
4132	2314	1423	2431
4213	3124	1342	3241
4231	1324	1324	4231
4312	2134	1243	3421
4321	1234	1234	4321

C.2 Table des classes des symétries complètes sur [3], [4] et [5]

Cette section donne les classes des symétries complètes, avec le représentant dans la colonne de gauche, pour S_3, S_4 et S_5.
Les permutations sont données dans l'ordre lexicographique (en colonne et en ligne).

$\pi \in S_3$			
123	321		
132	213	231	312

$\pi \in S_4$							
1234	4321						
1243	2134	3421	4312				
1324	4231						
1342	1423	2314	2431	3124	3241	4132	4213
1432	2341	3214	4123				
2143	3412						
2413	3142						

$\pi \in S_5$							
12345	54321						
12354	21345	45321	54312				
12435	13245	53421	54231				
12453	12534	23145	31245	35421	43521	54132	54213
12543	32145	34521	54123				
13254	21435	45231	53412				
13425	14235	52431	53241				
13452	15234	23415	25431	41235	43251	51432	53214
13524	14253	24135	31425	35241	42531	52413	53142
13542	15243	24531	32415	34251	42135	51423	53124
14325	52341						
14352	15324	24315	25341	41325	42351	51342	52314
14523	32541	34125	52143				
14532	15423	23541	32451	34215	43125	51243	52134
15342	24351	42315	51324				
15432	23451	43215	51234				
21354	45312						
21453	21534	23154	31254	35412	43512	45132	45213
21543	32154	34512	45123				
23514	25134	25413	31452	35214	41253	41532	43152
24153	31524	35142	42513				
24513	25143	31542	32514	34152	35124	41523	42153
25314	41352						

Bibliographie

[Babson-West 92] E. Babson et J. West, 1992, communication personnelle

[Billey-Jockusch-Stanley 91] S. Billey, W. Jockusch et R. Stanley, *Some Combinatorial Properties of* Schubert *Polynomials*, 1991, à paraître

[Delest-Dulucq 87] M.P. Delest et S. Dulucq, *Enumeration of directed column-convex animals with given perimeter and area*, rapport Université de Bordeaux I numéro I 87-15, 1987

[Dulucq-Gire 92] S. Dulucq et S. Gire, 1992, communication personnelle

[Dulucq-Gire-West 92] S. Dulucq, S. Gire et J. West, *Permutation Trees and Planar Maps*, 1992, à paraître

[Erdös-Szekeres 39] P. Erdös et G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Mathematica **2** (1939), 463-470

[Haiman 91] M. Haiman, 1991, communication personnelle

[Knuth 73] D.E. Knuth, *The art of computer programming*, volume 1 / Fundamental Algorithms, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973, 238-239

[Ray-West 92] N. Ray et J. West, *The Structure of Permutation Trees*, 1992, communication personnelle

[Regev 81] A. Regev, *Asymptotic Values for Degrees Associated with Strips of* Young *Diagrams*, Advances in Mathematics **41** (1981), 115-136

[Rotem 81] D. Rotem, *Stack sortable permutations*, Discrete Mathematics **33** (1981), 185-196

[Simion-Schmidt 85] R. Simion et F. Schmidt, *Restricted Permutations*, European Journal of Combinatorics **6** (1985), 383-406

[Sloane 73] N.J.A. Sloane, *A Handbook of Integer Sequences*, Academic Press, 1973, références **651** et **652**, page 659

[Stankova 92] Z. Stankova, *Forbidden Subsequences*, 1992, à paraître

[WEST 90] J. WEST, *Permutations with forbidden subsequences and Stack-sortable permutations*, Ph.D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA, 1990

[WEST 91] J. WEST, *Permutation trees and the* Catalan *and* Schröder *numbers*, soumis à Discrete Mathematics

[WEST 92a] J. WEST, *A Catalogue of Forbidden Subsequence Results*, 1992, communication personnelle

[WEST 92b] J. WEST, 1992, communication personnelle

[ZEILBERGER 92] D. ZEILBERGER, *A proof of* J. WEST*'s conjecture that the number of two-stack sortable permutations of length* n *is* $2(3n)!/((n+1)!(2n+1)!)$, soumis à Discrete Mathematics