

Application au calcul financier

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

2 décembre 2015

Généralités

L'intérêt est la rémunération du placement d'argent.

Il dépend :

- du taux d'intérêts r sur la période
- du capital placé
- de la durée du placement.

Intérêts simples

Si les intérêts ne sont capitalisés qu'au terme du placement, on parle d'intérêts simples. Dans ce cas, si C_0 est le capital initial placé pendant n périodes au taux r , il rapporte $C_0 \times n \times r$.

Intérêts simples

Si les intérêts ne sont capitalisés qu'au terme du placement, on parle d'intérêts simples. Dans ce cas, si C_0 est le capital initial placé pendant n périodes au taux r , il rapporte $C_0 \times n \times r$.

Le capital disponible en fin de placement est

$$C_0 + C_0 \times n \times r = C_0(1 + nr)$$

Intérêts composés

Si les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque période, on parle d'intérêts composés. Dans ce cas, les intérêts sont incorporés au capital pour créer d'autres intérêts.

Intérêts composés

Si les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque période, on parle d'intérêts composés. Dans ce cas, les intérêts sont incorporés au capital pour créer d'autres intérêts.

Un capital C_0 placé au taux r sur n périodes donne en fin de placement un capital

$$C_0(1+r)^n$$

Intérêts composés

Si les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque période, on parle d'intérêts composés. Dans ce cas, les intérêts sont incorporés au capital pour créer d'autres intérêts.

Un capital C_0 placé au taux r sur n périodes donne en fin de placement un capital

$$C_0(1+r)^n$$

Preuve

En exercice...

Définition

- 1 $C_n = C_0(1 + r)^n$ s'appelle la valeur acquise de C_0 (placée au taux d'intérêts r durant n périodes)
- 2 Inversement $C_0 = \frac{C_n}{(1 + r)^n}$ s'appelle la valeur actuelle de C_n .
On dit qu'on a actualisé C_n .

Valeurs acquise et actuelle

Définition

- 1 $C_n = C_0(1 + r)^n$ s'appelle la valeur acquise de C_0 (placée au taux d'intérêts r durant n périodes)
- 2 Inversement $C_0 = \frac{C_n}{(1 + r)^n}$ s'appelle la valeur actuelle de C_n .
On dit qu'on a actualisé C_n .

Définition

L'opération qui consiste à rechercher la valeur actuelle d'un capital disponible plus tard est appelée actualisation.
Le taux d'intérêts est alors appelé taux d'actualisation.

Valeurs acquise et actuelle

Définition

- 1 $C_n = C_0(1 + r)^n$ s'appelle la valeur acquise de C_0 (placée au taux d'intérêts r durant n périodes)
- 2 Inversement $C_0 = \frac{C_n}{(1 + r)^n}$ s'appelle la valeur actuelle de C_n .
On dit qu'on a actualisé C_n .

Définition

L'opération qui consiste à rechercher la valeur actuelle d'un capital disponible plus tard est appelée actualisation.
Le taux d'intérêts est alors appelé taux d'actualisation.

Remarque

On ne peut comparer ou additionner divers capitaux que s'ils sont d'abord ramenés à la même date.

Exercice 1

On place 1000 € pendant 3 ans à 10%.

De quelle somme dispose-t-on en fin de placement ?

Exercice 1

On place 1000 € pendant 3 ans à 10%.

De quelle somme dispose-t-on en fin de placement ?

Exercice 2

Quel capital C_0 faut-il placer pour obtenir 1000 € dans 2 ans au taux $r = 5\%$?

Exercice 1

On place 1000 € pendant 3 ans à 10%.

De quelle somme dispose-t-on en fin de placement ?

Exercice 2

Quel capital C_0 faut-il placer pour obtenir 1000 € dans 2 ans au taux $r = 5\%$?

Exercice 3

Combien d'années doit-on placer 1000 € au taux $r = 2\%$ pour obtenir 1082,43 € ?

Exercice 1

On place 1000 € pendant 3 ans à 10%.
De quelle somme dispose-t-on en fin de placement ?

Exercice 2

Quel capital C_0 faut-il placer pour obtenir 1000 € dans 2 ans au taux $r = 5\%$?

Exercice 3

Combien d'années doit-on placer 1000 € au taux $r = 2\%$ pour obtenir 1082,43 € ?

Exercice 4

On a placé 1000 € pendant 5 ans et on a obtenu 1159,27 €. Quel est le taux de placement ?

Formation d'un capital par annuités

Définition

On appelle annuités une suite de versements effectués à intervalles réguliers.

La première annuité est A_0 . Elle est versée au temps $t = 0$.

Les autres annuités A_k sont versées aux dates

$k = 1, 2, \dots, n - 1$ (dernier versement A_{n-1}).

On note C_n la valeur acquise au taux r de cet ensemble de versements à la date n .

On représente ces versements par le diagramme ci-dessous.

Formation d'un capital par annuités

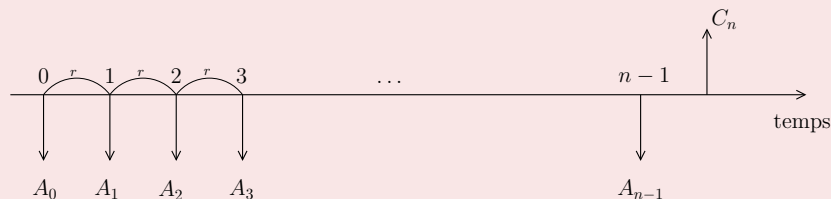
Définition

On appelle annuités une suite de versements effectués à intervalles réguliers.

La première annuité est A_0 . Elle est versée au temps $t = 0$. Les autres annuités A_k sont versées aux dates $k = 1, 2, \dots, n-1$ (dernier versement A_{n-1}).

On note C_n la valeur acquise au taux r de cet ensemble de versements à la date n .

On représente ces versements par le diagramme ci-dessous.



Formation d'un capital par annuités

Définition

C_n =valeur du capital formé=la somme des valeurs acquises de chaque versement.

Formation d'un capital par annuités

Définition

C_n =valeur du capital formé=la somme des valeurs acquises de chaque versement.

$$C_n = A_0(1+r)^n + A_1(1+r)^{n-1} + \dots + A_{n-1}(1+r)$$

Formation d'un capital par annuités

Définition

C_n =valeur du capital formé=la somme des valeurs acquises de chaque versement.

$$C_n = A_0(1+r)^n + A_1(1+r)^{n-1} + \dots + A_{n-1}(1+r)$$

Si les annuités sont constantes $A_0 = A_1 = \dots = A$ alors :

$$C_n = A(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Exercice

On considère 3 versements de 1000 € les 1^{er} janvier 2012, 2013 et 2014 au taux $r = 10\%$.

Quelle sera la valeur acquise au 1^{er} janvier 2015 ?

Remboursement d'un emprunt par annuités

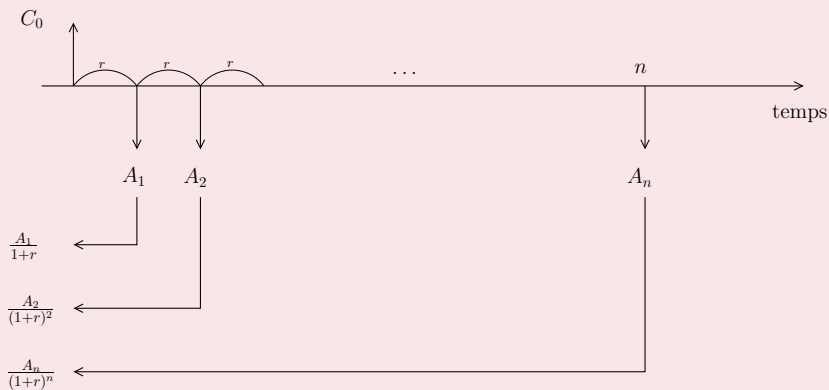
Présentation

Situation symétrique à la précédente. A la date $t = 0$, on emprunte un capital C_0 qui est remboursé par annuités. Le taux d'intérêts est r . Les annuités A_k sont versées aux dates $k = 1, 2, \dots, n$.

La valeur actuelle de l'annuité A_k est $\frac{A_k}{(1+r)^k}$.

On représente ces versements par le diagramme ci-après.

Remboursement d'un emprunt par annuités



Remboursement d'un emprunt par annuités

L'emprunt est intégralement remboursé si et seulement si C_0 est égal à la somme des valeurs actuelles des remboursements.

Remboursement d'un emprunt par annuités

L'emprunt est intégralement remboursé si et seulement si C_0 est égal à la somme des valeurs actuelles des remboursements.

$$C_0 = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r)^n}$$

(valeur du capital emprunté=valeur des remboursements à la date $t = 0$)

Remboursement d'un emprunt par annuités

L'emprunt est intégralement remboursé si et seulement si C_0 est égal à la somme des valeurs actuelles des remboursements.

$$C_0 = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r)^n}$$

(valeur du capital emprunté = valeur des remboursements à la date $t = 0$)

Si toutes les annuités sont constantes $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ alors

$$C_0 = \frac{A}{r} (1 - (1+r)^{-n})$$

Exercice 1

On considère un emprunt de 10000 € remboursables en 3 annuités constantes au taux $r = 10\%$.
Quel est le montant de l'annuité ?

Exercice 1

On considère un emprunt de 10000 € remboursables en 3 annuités constantes au taux $r = 10\%$.

Quel est le montant de l'annuité ?

Exercice 2

Un emprunt de 10000 € au taux d'intérêt annuel de 10% est remboursé en n annuités A_1, A_2, \dots, A_n .

- 1 Sachant que $n = 3$, $A_1 = 0$ et $A_2 = A_3$, déterminer la valeur de l'annuité A_2 .
- 2 Sachant que $n = 10$ et que $A_k = A$ pour tout k (annuités constantes), déterminer la valeur de A .

Présentation

La majorité des méthodes d'évaluation d'un investissement repose sur la technique de l'actualisation. L'analyse d'un investissement d'un point de vue financier se réduit à l'analyse de ses conséquences monétaires. À partir d'un ensemble de flux répartis dans le temps il faut prendre la décision de lancer le projet ou au contraire d'y renoncer.

Présentation

La majorité des méthodes d'évaluation d'un investissement repose sur la technique de l'actualisation. L'analyse d'un investissement d'un point de vue financier se réduit à l'analyse de ses conséquences monétaires. À partir d'un ensemble de flux répartis dans le temps il faut prendre la décision de lancer le projet ou au contraire d'y renoncer.

Considérons que la réalisation d'un projet implique un investissement initial (en date 0) noté I_0 (avec $I_0 > 0$) et que son exploitation engendre des bénéfices A_1, A_2, \dots, A_n .

Présentation

Le procédé de l'actualisation va permettre de comparer des montants monétaires datés.

Pour actualiser des flux, il faut disposer d'un taux, appelé taux d'actualisation, et non plus taux d'intérêts dans la mesure où les opérations d'investissement ne donnent pas lieu au versement d'un intérêt.

Valeur actuelle nette VAN



Définition

La valeur actuelle nette VAN d'un investissement est définie comme la différence entre la valeur actuelle des flux positifs et celle des flux négatifs.

$$VAN = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r)^n} - I_0$$

Définition

La valeur actuelle nette VAN d'un investissement est définie comme la différence entre la valeur actuelle des flux positifs et celle des flux négatifs.

$$VAN = \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r)^n} - I_0$$

La décision d'investissement dépend du signe de la VAN.

- Si $VAN > 0$ l'investissement crée de la valeur pour l'entreprise. Cet investissement est donc intéressant, rentable, pour la valeur du taux d'actualisation choisi.
- Si $VAN < 0$ l'investissement est rejeté.

Remarque

Si $A = A_1 = A_2 = \dots = A_n$ alors $VAN = \frac{A}{r} (1 - (1 + r)^{-n}) - I_0$

Remarque

Si $A = A_1 = A_2 = \dots = A_n$ alors $VAN = \frac{A}{r} (1 - (1 + r)^{-n}) - I_0$

Exercice

Pour un taux d'actualisation de 12%, calculer la VAN d'un investissement de coût initial $I_0 = 1000$ € rapportant sur 5 ans les bénéfices : $A_1 = 200$ €, $A_2 = 300$ €, $A_3 = 350$ €, $A_4 = 350$ €, $A_5 = 150$ € .

Même question pour un taux d'actualisation de 10%.

Le taux de rendement interne TRI (ou TIR)

Définition

Le taux de rendement interne TRI (ou taux interne de rentabilité TIR) est le taux d'actualisation r^* pour lequel la VAN est nulle. En dautres termes, r^* est tel que :

$$VAN(r^*) = \frac{A_1}{1+r^*} + \frac{A_2}{(1+r^*)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r^*)^n} - I_0 = 0$$

Le taux de rendement interne TRI (ou TIR)

Définition

Le taux de rendement interne TRI (ou taux interne de rentabilité TIR) est le taux d'actualisation r^* pour lequel la VAN est nulle. En dautres termes, r^* est tel que :

$$VAN(r^*) = \frac{A_1}{1+r^*} + \frac{A_2}{(1+r^*)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r^*)^n} - I_0 = 0$$

Remarque

Si VAN est une fonction strictement décroissante du taux d'actualisation alors le TRI est à l'intersection de la courbe représentative de la VAN et de l'axe des abscisses TRI= r^* .

Le taux de rendement interne TRI (ou TIR)

Définition

Le taux de rendement interne TRI (ou taux interne de rentabilité TIR) est le taux d'actualisation r^* pour lequel la VAN est nulle. En dautres termes, r^* est tel que :

$$VAN(r^*) = \frac{A_1}{1+r^*} + \frac{A_2}{(1+r^*)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r^*)^n} - I_0 = 0$$

Remarque

Si VAN est une fonction strictement décroissante du taux d'actualisation alors le TRI est à l'intersection de la courbe représentative de la VAN et de l'axe des abscisses TRI= r^* .

- Si $r > r^*$ alors $VAN < 0$, le projet est à rejeter.
- Si $r < r^*$ alors $VAN > 0$, le projet est intéressant.

Le taux de rendement interne TRI (ou TIR)

Remarque

La détermination du TRI peut se faire par des méthodes d'analyse numérique de résolution d'équation du type $f(x) = 0$.

Le taux de rendement interne TRI (ou TIR)

Remarque

La détermination du TRI peut se faire par des méthodes d'analyse numérique de résolution d'équation du type $f(x) = 0$.

Exercice

Une société envisage d'acheter une machine valant 600000 € dont la durée de vie prévue est de 5 ans. Sa valeur de revente sera de 50000 € (cette revente sera considérée comme un bénéfice pour la 5^{ème} année). On suppose que cet investissement va générer des bénéfices annuels constants égaux à 140000 € .

- 1 Calculer la VAN de cet investissement au taux d'actualisation de 6%.
- 2 Calculer son TRI.
- 3 À quelle condition, portant sur le taux d'actualisation, le projet est-il rentable ?

Exercice

Une entreprise propose à ses ingénieurs deux types de contrats relatifs au paiement des primes.

Contrat de type 1 (primes versées à la fin de chaque année)

1^{ère} année : 2500 euros puis augmentation de 300 euros chaque année.

Contrat de type 2 (primes versées à la fin de chaque semestre)

1^{er} semestre : 1000 euros puis augmentation de 100 euros chaque semestre.

- 1 Déterminer u_n et v_n , les sommes perçues (primes) avec le contrat de type 1 et 2 à la fin de la $n^{\text{ème}}$ année.
- 2 Quel est le contrat le plus avantageux en terme de primes ? (discuter suivant le nombre d'années)