

# Dérivation

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

14 octobre 2015

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , et  $a$  un point de  $I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  lorsque le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$  admet une limite  $\ell$  en  $a$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

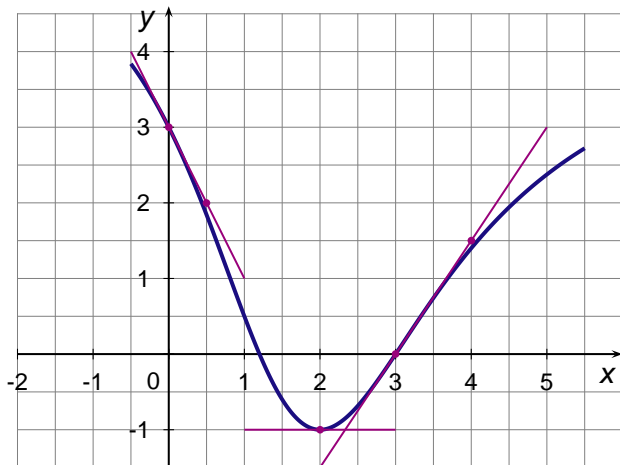
autrement dit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

On appelle alors  $\ell$  **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , et on le note  $f'(a)$ .

# Nombre dérivé : Exemple

La courbe  $\mathcal{C}_f$  tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .



Par lecture graphique, déterminer  $f'(0)$ ,  $f'(2)$  et  $f'(3)$ .

## Définition

Soit  $I$  un intervalle. Si une fonction est dérivable en tout nombre  $a \in I$  alors on dit que cette fonction est dérivable sur  $I$ , et on note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $I$ .

## Conséquences

- $\mathcal{C}_f$  est la courbe représentant la fonction  $f$ . Une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Pour tout réel  $h$  tel que  $a + h \in I$ , on a :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

- Pour tout réel  $\Delta(x)$  tel que  $a + \Delta(x) \in I$ , on a :

$$f(a + \Delta(x)) \approx f(a) + f'(a)\Delta(x)$$

- Si  $f$  est dérivable au point  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ . La réciproque est fautive (contre-exemple :  $x \mapsto |x|$  en 0 ).

## Exercice

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ .

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1.

Donner une valeur approchée de  $(1,001)^3$ .

## Exercice

Donner une valeur approchée de  $\sqrt[3]{1001,5}$ .

## Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, et soit  $t_0 \in I$  :

- on dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $t_0$  lorsque le taux d'accroissement de  $f$  a une limite finie à gauche en  $t_0$ . Si c'est la cas, cette limite est notée  $f'_g(t_0)$  et la demi-droite

d'équation 
$$\begin{cases} y = f'_g(t_0)(x - t_0) + f(t_0) \\ x \leq t_0 \end{cases}, \text{ est appelée}$$

demi-tangente à la courbe au point d'abscisse  $t_0$ .

## Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, et soit  $t_0 \in I$  :

- on dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $t_0$  lorsque le taux d'accroissement de  $f$  a une limite finie à gauche en  $t_0$ . Si c'est la cas, cette limite est notée  $f'_g(t_0)$  et la demi-droite

$$\text{d'équation } \begin{cases} y = f'_g(t_0)(x - t_0) + f(t_0) \\ x \leq t_0 \end{cases}, \text{ est appelée}$$

demi-tangente à la courbe au point d'abscisse  $t_0$ .

- même chose à droite...on note la limite finie à droite en  $t_0$ ,  $f'_d(t_0)$ .



## Théorème

Soit  $t_0$  un point intérieur à  $I$ ,  $f$  est dérivable en  $t_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $t_0$  avec  $f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$ .

## Théorème

Soit  $t_0$  un point intérieur à  $I$ ,  $f$  est dérivable en  $t_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $t_0$  avec  $f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$ .

## Exemple

Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.

## Théorème

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $J$  tel que pour tout  $x \in I$  on ait  $u(x) \in J$ , alors la fonction  $f = g \circ u$  est dérivable sur  $I$  et on a pour tout  $x \in I$  :

$$f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$$

En résumé, on note  $(g \circ u)' = g' \circ u \times u'$

## Théorème

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $J$  tel que pour tout  $x \in I$  on ait  $u(x) \in J$ , alors la fonction  $f = g \circ u$  est dérivable sur  $I$  et on a pour tout  $x \in I$  :

$$f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$$

En résumé, on note  $(g \circ u)' = g' \circ u \times u'$

## Application

Calcul de la dérivée de  $u^n$  et de  $\sqrt{u}$ .

$$(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

# Dérivées usuelles : récapitulation

fonction	dérivée	commentaires	
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$k$ constante	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}$	sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ , $\mathbb{R}^*$ sinon
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$		sur $\mathbb{R}_+^*$

# Dérivées usuelles : récapitulation

fonction	dérivée	commentaires	
$u + v$	$u' + v'$		
$ku$	$ku'$	$k$ constante	
$uv$	$u'v + uv'$		
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$		$v(x) \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$		$v(x) \neq 0$
$g \circ u$	$g' \circ u \times u'$		
$u^n$	$nu^{n-1}u'$	$n \in \mathbb{Z}$	avec $u(x) \neq 0$ si $n < 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$		$u(x) > 0$

## Exercice

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \left(2 + \frac{x^2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right)$ .  
Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .

## Exercice

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 - \frac{4x - 3}{x^2 + 1}$ .  
Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .

## Exercice

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = [-1; 1]$  par  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .  
Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .

## Théorème de Rolle

Si  $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a; b]$ , dérivable sur  $]a; b[$  et si  $f(a) = f(b)$ , alors il existe  $c \in ]a; b[$ ,  $f'(c) = 0$ .



## Théorème de Rolle

Si  $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a; b]$ , dérivable sur  $]a; b[$  et si  $f(a) = f(b)$ , alors il existe  $c \in ]a; b[$ ,  $f'(c) = 0$ .

## Remarque

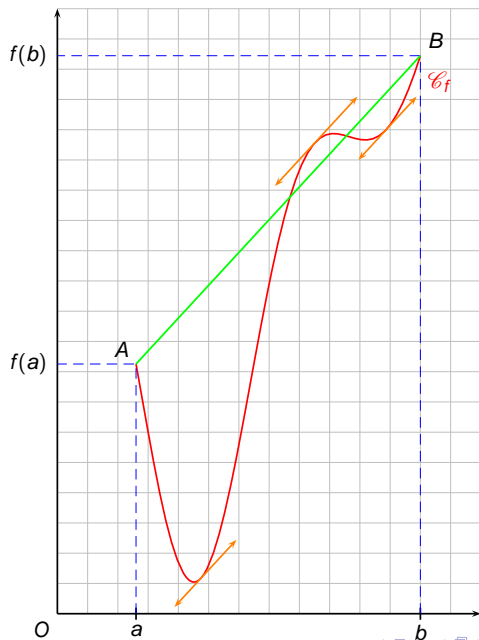
Le théorème est faux si  $f$  n'est pas continue en  $a$  ou en  $b$  (prendre  $f(x) = x$  sur  $[0; 1[$  et  $f(1) = 0$ ).

## Théorème : Égalité des accroissements finis

Si  $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$ ,  
alors :

$$\exists c \in ]a; b[, f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

# Interprétation graphique



## Théorème : Inégalité des accroissements finis

Si  $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$  et s'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que :  $\forall x \in ]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$ , alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

## Théorème : Inégalité des accroissements finis

Si  $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$  et s'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que :  $\forall x \in ]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$ , alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

## Exemple d'application

On cherche à encadrer  $\sqrt{105}$ .

Considérer  $f(x) = \sqrt{x}$  sur  $[100; 105]$ .

Notons  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  sur  $[a; b]$ .

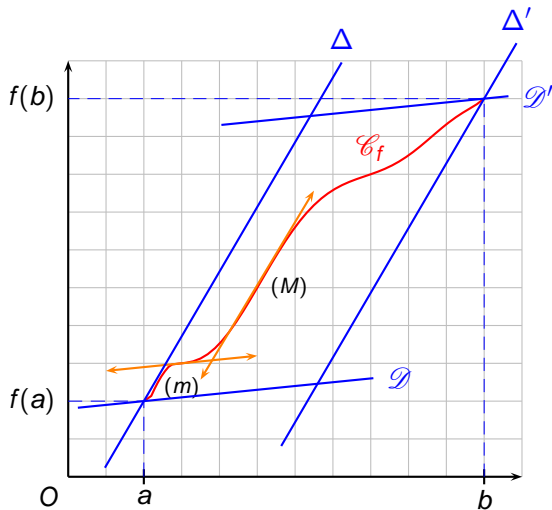
Soit  $x \in [a; b]$ .

- $x \geq a \Rightarrow m(x - a) + f(a) \leq f(x) \leq M(x - a) + f(a)$ ,
- $x \leq b \Rightarrow M(x - b) + f(b) \leq f(x) \leq m(x - b) + f(b)$ .

On note  $\mathcal{D} : y = m(x - a) + f(a)$ ,  $\mathcal{D}' : y = m(x - b) + f(b)$ ,  
 $\Delta : y = M(x - a) + f(a)$  et  $\Delta' : y = M(x - b) + f(b)$ .

Dans ce cas,  $\mathcal{C}_f$  est comprise dans le parallélogramme délimité par ces quatre droites.

# Interprétation graphique



## Théorème : Signe de la dérivée

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$  et dérivable sur  $I$  privé de ses bornes (noté  $\overset{\circ}{I}$ , intérieur de  $I$ ), on a :

- 1  $f$  est croissante sur  $I$  ssi  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$ .
- 2  $f$  est décroissante sur  $I$  ssi  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq 0$ .
- 3  $f$  est strictement croissante sur  $I$  ssi  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$  sauf en quelques points où  $f'$  s'annule .
- 4  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  ssi  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$  sauf en quelques points où  $f'$  s'annule.
- 5  $f$  est constante sur  $I$  ssi  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$ .



## Théorème : Signe de la dérivée

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$  et dérivable sur  $I$  privé de ses bornes (noté  $\overset{\circ}{I}$ , intérieur de  $I$ ), on a :

- 1  $f$  est croissante sur  $I$  ssi  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$ .
- 2  $f$  est décroissante sur  $I$  ssi  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq 0$ .
- 3  $f$  est strictement croissante sur  $I$  ssi  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$  sauf en quelques points où  $f'$  s'annule .
- 4  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  ssi  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$  sauf en quelques points où  $f'$  s'annule.
- 5  $f$  est constante sur  $I$  ssi  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in \overset{\circ}{I}$ .

## Exemple

La fonction cube est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

## Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $f'$  sa dérivée sur  $I$ . Si  $f'$  est continue sur  $I$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  (ou continûment dérivable sur  $I$ ). Si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , on note  $f''$  sa dérivée, on l'appelle la dérivée seconde de  $f$ .

## Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $f'$  sa dérivée sur  $I$ . Si  $f'$  est continue sur  $I$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  (ou continûment dérivable sur  $I$ ). Si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , on note  $f''$  sa dérivée, on l'appelle la dérivée seconde de  $f$ .

De proche en proche on réitère le processus jusqu'à l'ordre  $n$ . On dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable et on note  $f^{(n)}$  sa dérivée  $n^{\text{ème}}$ . Si  $f$  admet des dérivées à tout ordre sur  $I$ , on dit qu'elle est indéfiniment dérivable sur  $I$  ou de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

## Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $f'$  sa dérivée sur  $I$ . Si  $f'$  est continue sur  $I$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  (ou continûment dérivable sur  $I$ ). Si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , on note  $f''$  sa dérivée, on l'appelle la dérivée seconde de  $f$ .

De proche en proche on réitère le processus jusqu'à l'ordre  $n$ . On dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable et on note  $f^{(n)}$  sa dérivée  $n^{\text{ème}}$ . Si  $f$  admet des dérivées à tout ordre sur  $I$ , on dit qu'elle est indéfiniment dérivable sur  $I$  ou de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

## Exemple

Soit  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3$ .  
 $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Exemple

Déterminer les dérivées partielles premières de la fonction  $f(x, y) = 5x^2y^3$ .

## Exemple

Déterminer les dérivées partielles premières de la fonction  $f(x, y) = 5x^2y^3$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 15x^2y^2$$

## Exemple

Déterminer les dérivées partielles premières de la fonction  $f(x, y) = 5x^2y^3$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 15x^2y^2$$

## Exercice

Déterminer les dérivées partielles premières de la fonction  $f(x, y) = 3x^2y^2 + 4xy^3 + 7y$  puis celles de la fonction de production de Cobb-Douglas  $g(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$ .