Fonction exponentielle

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

1er novembre 2015

Introduction

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle définit donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Introduction

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle définit donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition

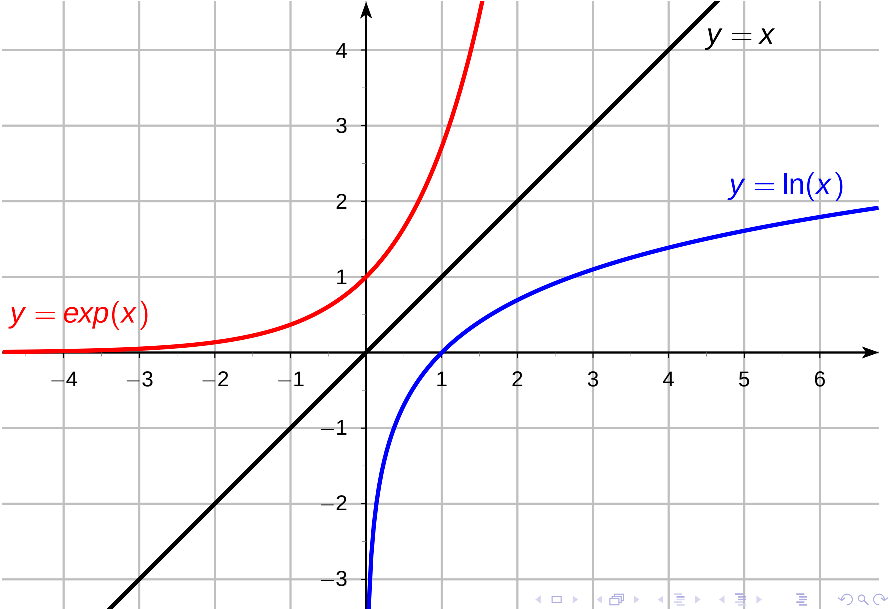
La réciproque est appelée fonction exponentielle et notée exp, elle est définie par :

$$\begin{array}{rrcl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0;+\infty[\\ & x & \mapsto & \exp(x) = y \ \text{ tel que } y > 0 \text{ et } \ln(y) = x \end{array}$$

Conséquences

1. La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.
2. La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée ne s'annule pas, donc la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.
3. Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction exp et celle de la fonction ln sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Courbe représentative



Propriété fondamentale de l'exponentielle

Théorème

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Il en découle en particulier que $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Propriété fondamentale de l'exponentielle

Théorème

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Il en découle en particulier que $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Notation

Pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

Autres propriétés

Propriétés

Pour tous réels x et y,

1. $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
3. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
4. Pour tout entier relatif p, $e^{px} = (e^x)^p$.

Autres propriétés

Propriétés

Pour tous réels x et y,

1. $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
3. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
4. Pour tout entier relatif p, $e^{px} = (e^x)^p$.

Exercice : Preuve

Limites

Limites importantes

1. $$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
2. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
3. $$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$
4. $$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$
5. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Limites

Limites importantes

1. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
3. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
4. $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exercice : Preuve

Étude de la fonction exponentielle

Propriété

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences

1. Pour tous réels a et b, $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.
2. Pour tous réels a et b, $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.

Applications

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\exp(2x+5) = \exp\left(\frac{3}{x}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\exp(x^2-4) \leq \exp(-3x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} + 8e^{x} + 6 = 0$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de e^x	$+$	
Variation de exp	0	$+\infty$

Inégalité de convexité

Théorème

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$$

Inégalité de convexité

Théorème

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$$

Exercice

Prouver le résultat précédent.

Fonction exp(u)

u est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie par : $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Fonction $\exp(u)$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie par : $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Exercice

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+2x}$.
Déterminer la fonction dérivée de f.

Fonctions exponentielles de base a

Définition

Soit a un réel strictement positif, on appelle fonction exponentielle de base a, la fonction notée $\exp_a$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$$

Fonctions exponentielles de base a

Définition

Soit a un réel strictement positif, on appelle fonction exponentielle de base a, la fonction notée $\exp_a$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a(x) = e^{x \ln(a)}$$

Remarques

- La fonction exponentielle de base 1, $\exp_1 : x \longmapsto 1^x$, est constante et vaut 1.
- La fonction exponentielle de base e, $\exp_e : x \longmapsto e^x$, est la fonction exponentielle déjà étudiée.

Fonctions exponentielles de base a

Soit a un réel strictement positif.

Théorème

1. La fonction $\exp_a$ est définie, dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Pour tout réel x, $\exp_a'(x) = \ln a \times \exp_a(x) = a^x \ln a$.

Fonctions exponentielles de base a

<table>
<tr><th>$a > 1$</th><th>$0 < a < 1$</th></tr>
<tr>
<td>

- $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$.

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\exp_a'(x)$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$\exp_a$</td><td>$0 \nearrow +\infty$</td></tr>
</table>

L'axe des abscisses est asymptote en $-\infty$.

</td>
<td>

- $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = 0$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$.

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\exp_a'(x)$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$\exp_a$</td><td>$+\infty \searrow 0$</td></tr>
</table>

L'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$.

</td>
</tr>
</table>

Fonctions puissances

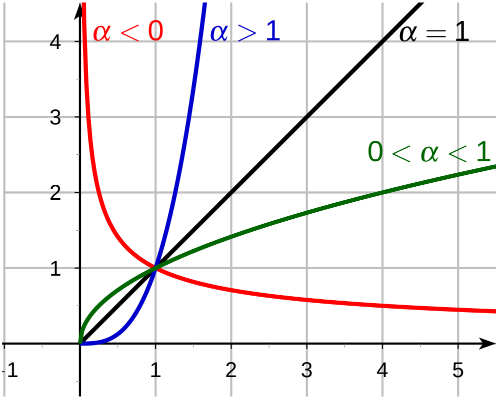
Définition

Si α est un réel et si $x > 0$ alors on a :

$$x^\alpha = \exp_x(\alpha) = e^{\alpha \ln(x)}$$

$$[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Fonctions puissances



Fonctions puissances

Propriétés

Avec $x, y > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, et donc $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$, et $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.
2. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$.
4. Pour α non nul, $y = x^\alpha \iff x = y^{\frac{1}{\alpha}}$.

Croissances comparées

Théorème

1. Si $\alpha < \beta$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^\beta}{x^\alpha} = 0$.
2. Si α et β sont des réels strictement positifs, alors :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{[\ln(x)]^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$
3. Si α est un réel et si $\beta > 0$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.