Fonction logarithme

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

1er novembre 2015

Transformer les produits en somme

Introduction

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$, elle admet une unique primitive qui s'annule en 1, c'est la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Transformer les produits en somme

Introduction

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$, elle admet une unique primitive qui s'annule en 1, c'est la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Définition

L'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée logaritme népérien, elle est notée ln. On a donc $\forall x > 0$, $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Conséquences

1. La fonction ln est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. $\ln 1 = 0$
3. La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. La fonction ln est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Propriétés algébriques

Propriété fondamentale

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Propriétés algébriques

Propriété fondamentale

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exercice : Preuve

- a étant un réel strictement positif, on considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(ax) - \ln x$.

Propriétés algébriques

Propriété fondamentale

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exercice : Preuve

- a étant un réel strictement positif, on considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(ax) - \ln x$.
- Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

Propriétés algébriques

Propriété fondamentale

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exercice : Preuve

- a étant un réel strictement positif, on considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(ax) - \ln x$.
- Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

- Pour tout réel $x > 0$, $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.

D’autres propriétés

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif non nul :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$

D'autres propriétés

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif non nul :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

D'autres propriétés

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif non nul :

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$

D'autres propriétés

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif non nul :

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$

D'autres propriétés

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif non nul :

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$

Exercice : Preuve

Limites

Limites importantes

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \ ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

Limites

Limites importantes

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \ ; \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x \ln x = 0 \ ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Exercice : Preuve

Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$

$\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$

Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$

$\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$

Puisque $\ln 1 = 0$: Pour tout réel x strictement positif :

$\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$

$\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$

$\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$

Exercice

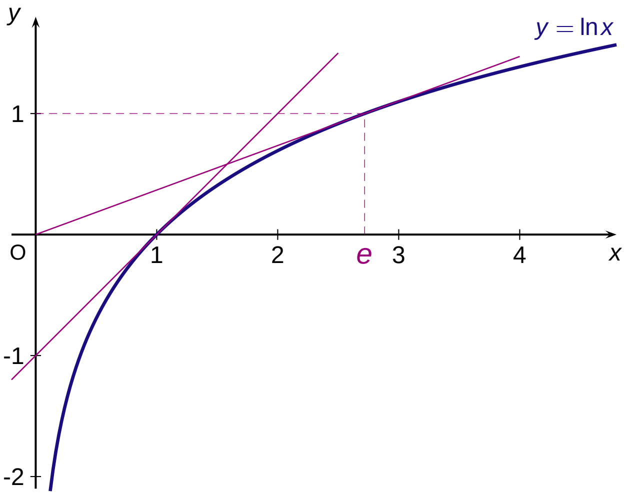
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x-1) = \ln(x-2)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x^2-4) < \ln x$.
3. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0$.

Tableau de variations

x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	$\|\|$			$+$			
Variation de ln	$\|\|$ $-\infty$		0		1		$+\infty$

Le nombre e est le nombre tel que $\ln e = 1$.

Courbe représentative



Inégalité de convexité

Théorème

$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$$

Inégalité de convexité

Théorème

$$\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$$

Exercice

Prouver le résultat précédent.

Fonction $\ln(u)$

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I. La composée de la fonction u suivie de la fonction ln est notée $\ln(u)$.

Fonction $\ln(u)$

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I. La composée de la fonction u suivie de la fonction ln est notée $\ln(u)$.

Théorème

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I. Les fonctions u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations sur I.

Fonction ln(u)

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I. La composée de la fonction u suivie de la fonction ln est notée ln(u).

Théorème

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I. Les fonctions u et ln(u) ont les mêmes variations sur I.

Théorème

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction ln(u) est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Autres fonctions logarithmes

Définition

Soit a un réel strictement positif, $a \neq 1$.
On appelle fonction logarithme de base a la fonction notée $\log_a$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
La fonction logarithme de base 10 est notée log, elle est appelée fonction logarithme décimal.

Autres fonctions logarithmes

Définition

Soit a un réel strictement positif, $a \neq 1$.
On appelle fonction logarithme de base a la fonction notée $\log_a$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
La fonction logarithme de base 10 est notée log, elle est appelée fonction logarithme décimal.

1. La fonction $\log_a$ a les propriétés algébriques de la fonction ln.
2. Pour tout réel a strictement positif et $a \neq 1$, $\log_a(a) = 1$; en particulier : $\log(10) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = n$.