Les polynômes

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

22 septembre 2015

Généralités

Définition

Soit f_0 la fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = x^n$. Une fonction monôme de degré n est une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = ax^n$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$).

Généralités

Définition

Soit f_0 la fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x^n$. Une fonction monôme de degré n est une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^n$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$).

Exemples

$x \mapsto -x^3$ est une fonction monôme de degré 3.

Généralités

Définition

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où a_0, a_1, ..., a_n sont des réels donnés et s'appellent les coefficients du polynôme. Une fonction polynôme s'écrit comme une somme de monômes.

Généralités

Définition

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où a_0, a_1, ..., a_n sont des réels donnés et s'appellent les coefficients du polynôme. Une fonction polynôme s'écrit comme une somme de monômes.

Exemples

$x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ est un polynôme.
$x \mapsto \dfrac{x^4 - 4}{x^2 + 2}$ n'est pas un polynôme.
$x \mapsto x^3 - 4\sqrt{x} + 2$ n'est pas un polynôme.

Degré d'un polynôme

Définition

Soit P un polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Le nombre n est appelé degré de P. En d'autres termes, le degré d'un polynôme P est le maximum des degrés des monômes composant P.
Par convention $\deg(0) = -\infty$.

Degré d'un polynôme

Définition

Soit P un polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Le nombre n est appelé degré de P. En d'autres termes, le degré d'un polynôme P est le maximum des degrés des monômes composant P.

Par convention $\deg(0) = -\infty$.

Exemple

$x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ est un polynôme de degré 3.

$x \mapsto 3x - x^5$ est un polynôme de degré 5.

Degré d'un polynôme

Définition

Soit P un polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Le nombre n est appelé degré de P. En d'autres termes, le degré d'un polynôme P est le maximum des degrés des monômes composant P.
Par convention $\deg(0) = -\infty$.

Exemple

$x \mapsto -x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ est un polynôme de degré 3.
$x \mapsto 3x - x^5$ est un polynôme de degré 5.

Remarque

Les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Si P est un polynôme de degré n alors P' est de degré $n - 1$.

Propriétés

Propriétés admises

1. Soit P le polynôme défini par
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
P est le polynôme nul $\iff a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.
2. Soient P et Q les polynômes définis par
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et
$Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

$$P = Q \iff \begin{cases} n = p \\ a_0 = b_0\,;\ a_1 = b_1\,;\ \cdots\ a_n = b_n \end{cases}$$

Propriétés

Propriétés admises

1. Soit P le polynôme défini par
   $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
   P est le polynôme nul $\iff a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.
2. Soient P et Q les polynômes définis par
   $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et
   $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

$$P = Q \iff \begin{cases} n = p \\ a_0 = b_0\,;\ a_1 = b_1\,;\ \cdots\ a_n = b_n \end{cases}$$

Conséquence

L'écriture d'un polynôme est unique.

Propriétés

Théorème

Si P et Q sont deux polynômes alors $P + Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\max(\deg(P), \deg(Q))$ et PQ est un polynôme de degré $deg(P) + deg(Q)$ (P et Q non nuls).

Propriétés

Théorème

Si P et Q sont deux polynômes alors $P+Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\max(\deg(P), \deg(Q))$ et PQ est un polynôme de degré $deg(P)+deg(Q)$ (P et Q non nuls).

Exercice

1. Déterminer le degré de $P+Q$ et PQ avec $P(x)=x^2+3$ et $Q(x)=3x^5-2x^2+7$.
2. Déterminer le degré de $P+Q$ et PQ avec $P(x)=x^2+3$ et $Q(x)=-x^2+7x+3$.

Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$

Définition

Disons que le polynôme A *divise* le polynôme B, ou encore que B est *multiple* de A, et notons $A \mid B$, s'il existe un polynôme C tel que $B = AC$.
Il est facile de vérifier que tout polynôme divise 0, mais que 0 ne divise que lui-même. De même, 1 divise tout polynôme, mais les seuls polynômes qui divisent 1 sont les constantes non nulles.

Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$

Définition

Disons que le polynôme A *divise* le polynôme B, ou encore que B est *multiple* de A, et notons $A \mid B$, s'il existe un polynôme C tel que $B = AC$. Il est facile de vérifier que tout polynôme divise 0, mais que 0 ne divise que lui-même. De même, 1 divise tout polynôme, mais les seuls polynômes qui divisent 1 sont les constantes non nulles.

Propriétés

La relation de divisibilité possède les propriétés suivantes :

1. elle est « transitive » : si $A \mid B$ et $B \mid C$, alors $A \mid C$,
2. elle est « réflexive » : on a $A \mid A$.

Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$

Définition

Disons que le polynôme A *divise* le polynôme B, ou encore que B est *multiple* de A, et notons $A \mid B$, s'il existe un polynôme C tel que $B = AC$. Il est facile de vérifier que tout polynôme divise 0, mais que 0 ne divise que lui-même. De même, 1 divise tout polynôme, mais les seuls polynômes qui divisent 1 sont les constantes non nulles.

Propriétés

La relation de divisibilité possède les propriétés suivantes :

1. elle est « transitive » : si $A \mid B$ et $B \mid C$, alors $A \mid C$,
2. elle est « réflexive » : on a $A \mid A$.

Conséquence

Si A divise $B \neq 0$, alors $\deg A \leq \deg B$.

L'algorithme de division euclidienne

On se pose ici la question suivante : comment savoir si un polynôme A donné divise un polynôme B donné. Si A est nul, cela n'est possible que si B est nul ; et, si A est une constante non nulle, c'est vrai quelque soit B. On va déterminer un algorithme qui permet de traiter tous les cas. Comme pour les entiers, on va utiliser la *division euclidienne*.

Théorème

Soient A, B deux polynômes ; on suppose $A \neq 0$. Il existe alors un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$B = QA + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg A.$$

La division euclidienne

Théorème

Soient A, B deux polynômes ; on suppose $A \neq 0$. Il existe alors un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$B = QA + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg A.$$

Définition

Les polynômes Q et R dans ce théorème sont respectivement appelés *le quotient* et *le reste* de *la division euclidienne* de B par A.

La division euclidienne

Théorème

Soient A, B deux polynômes ; on suppose $A \neq 0$. Il existe alors un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$B = QA + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg A.$$

Définition

Les polynômes Q et R dans ce théorème sont respectivement appelés *le quotient* et *le reste* de *la division euclidienne* de B par A.

Remarque

Si le reste de la division euclidienne de B par A est nul alors A divise B.

Exercices

Exercice 1

Effectuer la division euclidienne de :

1. $A(x) = 4x^6 + 3x^5 + 2x^3 + 3x + 1$ par $B(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$.
2. $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 1$ par $B(x) = 2x^2 + x - 1$.

Exercices

Exercice 1

Effectuer la division euclidienne de :

1. $A(x) = 4x^6 + 3x^5 + 2x^3 + 3x + 1$ par $B(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$.
2. $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 1$ par $B(x) = 2x^2 + x - 1$.

Exercice 2

Montrer que $A(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 1$ est divisible par $B(x) = x - 1$ (en effectuant la division euclidienne).

Racines d'un polynôme

Définition

Une *racine* du polynôme P est un réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Racines d'un polynôme

Définition

Une *racine* du polynôme P est un réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Théorème

Le réel α est racine de P si et seulement si $(x - \alpha) \mid P$.

Racines d'un polynôme

Définition

Une *racine* du polynôme P est un réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Théorème

Le réel α est racine de P si et seulement si $(x - \alpha) \mid P$.

Preuve

Si $(x - \alpha)$ divise P, on a $P = (x - \alpha)Q$ avec Q, et il est immédiat que $P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) = 0$, *i.e.* que α est racine de P.
Supposons que α est racine de P. La division euclidienne de P par $(x - \alpha)$ donne :

$$P = (x - \alpha)Q + P(\alpha) = (x - \alpha)Q,$$

puisque $P(\alpha) = 0$ par hypothèse. Donc $(x - \alpha)$ divise bien P.

Corollaire

Soient $a_1, \ldots, a_k$ des racines distinctes de P. Alors

$$(x - a_1) \cdots (x - a_k) \mid P.$$

Racines d'un polynôme

Corollaire

Soient $a_1, \ldots, a_k$ des racines distinctes de P. Alors

$$(x - a_1) \cdots (x - a_k) \mid P.$$

Corollaire

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.

Racines multiples

Définition

Soit P un polynôme. On dit que le réel a est *racine d'ordre* $\geq k$ de P si $(x-a)^k$ divise P. On dit que a est *racine d'ordre* k de P si $(x-a)^k$ divise P et $(x-a)^{k+1}$ ne divise pas P. On dit que a est *racine simple* si c'est une racine d'ordre 1, et que a est *racine multiple* si c'est une racine d'ordre ≥ 2.

Racines multiples

Définition

Soit P un polynôme. On dit que le réel a est *racine d'ordre* $\geq k$ de P si $(x-a)^k$ divise P. On dit que a est *racine d'ordre* k de P si $(x-a)^k$ divise P et $(x-a)^{k+1}$ ne divise pas P. On dit que a est *racine simple* si c'est une racine d'ordre 1, et que a est *racine multiple* si c'est une racine d'ordre ≥ 2.

Remarque

Une *racine d'ordre* 0 de P n'est donc pas une racine du tout, et on évitera cette expression. Une racine est automatiquement d'ordre ≥ 1.

Racines multiples

Exemple

Soit $P(x) = (x^2 - 1)^3(x - 1)^2(x^2 - 4x + 3)^2$.
1 est racine de P d'ordre 7.
-1 est racine de P d'ordre 3.
3 est racine de P d'ordre 2.

Racines multiples

Exemple

Soit $P(x) = (x^2-1)^3(x-1)^2(x^2-4x+3)^2$.
1 est racine de P d'ordre 7.
-1 est racine de P d'ordre 3.
3 est racine de P d'ordre 2.

Théorème

Pour que a soit racine d'ordre $\geq k$ de P, il faut, et il suffit, que les k premières dérivées de P en a, à partir de P lui-même, soient nulles, *i.e.*

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0.$$

Racines multiples

Théorème

Pour que a soit racine d'ordre k de P, il faut, et il suffit, que

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Lien avec la factorisation

Théorème

Soient $a_1, \ldots, a_k$ des racines distinctes de $P \in \mathbb{R}[X]$, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$. Alors

$$(X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_k)^{m_k} \mid P.$$

Lien avec la factorisation

Théorème

Soient $a_1, \dots, a_k$ des racines distinctes de $P \in \mathbb{R}[X]$, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_k$. Alors

$$(X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_k)^{m_k} \mid P.$$

Corollaire

Si P est non nul, le nombre de ses racines *comptées avec leurs multiplicités* est inférieur ou égal à $\deg P$.

Lien avec la factorisation

Théorème

Tout polynôme de degré impair admet une racine réelle.

Lien avec la factorisation

Théorème

Tout polynôme de degré impair admet une racine réelle.

Théorème

Tout polynôme se décompose en un produit de facteurs de degrés 1 ou 2.

Lien avec la factorisation

Théorème

Tout polynôme de degré impair admet une racine réelle.

Théorème

Tout polynôme se décompose en un produit de facteurs de degrés 1 ou 2.

Exemple

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

L'algorithme d'Horner

L'algorithme de Horner est un algoritme permettant de limiter les erreurs lors de l'évaluation d'un polynôme.

Soit

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

L'algorithme consiste à réécrire le polynôme et d'évaluer plutôt

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 \ldots + x(a_{n-1} + a_n x) \ldots)))$$

Exemple

$$P(x) = 2 + 4x + 5x^2 + 3x^3 = 2 + x(4 + x(5 + 3x))$$

On passe ainsi de 5 multiplications et 3 additions à 3 multiplications et 3 additions.

Exercice

Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1. Calculer $P(1)$, $P(2)$ puis $P(3)$.
2. En déduire une factorisation de P.

L'algorithme d'Horner

Solution

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

L'algorithme d'Horner

Solution

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

$P(1) = 0$ et $P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$

L'algorithme d'Horner

Solution

	1	-6	11	-6
2		2	-8	6
	1	-4	3	0

Solution

	1	-6	11	-6
2		2	-8	6
	1	-4	3	0

$P(2) = 0$ et $P(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 3)$

Solution

	1	-6	11	-6
3		3	-9	6
	1	-3	2	0

Solution

	1	-6	11	-6
3		3	-9	6
	1	-3	2	0

$P(3) = 0$ et $P(x) = (x-3)(x^2 - 3x + 2)$

L'algorithme d'Horner

Solution

	1	-6	11	-6
3		3	-9	6
	1	-3	2	0

$P(3) = 0$ et $P(x) = (x-3)(x^2-3x+2)$

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$