

T.D. n° 1 : Polynômes

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 8x + 6 = 0$
2. $-x^2 + 6x - 10 = 0$
3. $x^2 + 4x - 21 = 0$
4. $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$
5. $x^4 + 4x^2 + 21 = 0$
6. $x^2 + 4x = 0$
7. $(x + 1)^3 + x + 1 = 0$
8. $x^2 = 9$
9. $2x^4 + 4x^2 + 2 \geq 0$
10. $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$
11. $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$
12. $\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} > 0$

Exercice 2

Existe-t-il deux nombres ayant pour somme 9 et pour produit -70 ?

Si oui, les calculer.

Exercice 3

La somme des âges de deux amis est 53 ans. Dans 5 ans, le produit de leurs âges sera 990.

Quels sont les âges des deux amis ?

Exercice 4

Soit le polynôme $P(x) = x^2 + 6x - 7$. Déterminer les racines de P sans calculer son discriminant.

Même question avec le polynôme $Q(x) = 3x^2 - 9x - 12$.

Exercice 5

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $A(x) = 4x^3 - 13x - 5$ par $B(x) = 2x + 1$.
2. $A(x) = x^8$ par $B(x) = x^4 + x^2 + 1$.
3. $A(x) = x^3 - 4x + 5$ par $B(x) = x^2 - 3x + 2$.
4. $A(x) = x^4 + 1$ par $B(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$.

Exercice 6

Soient les polynômes $P(x) = 6x^5 - 14x^4 + 11x^3 - 17x^2 + ax + b$ et $Q(x) = 2x^2 + 1$, où a et b sont des nombres réels. Déterminer les valeurs de a et b de sorte que $Q(x)$ divise $P(x)$.

Exercice 7

1. Montrer que le polynôme $D(x) = x + 1$ divise le polynôme $P(x) = x^5 + 1$, et déterminer le quotient de $P(x)$ par $D(x)$.
2. Même question avec $D(x) = x^2 - 1$ et $P(x) = x^8 - 1$. Quelles sont les racines de $P(x)$?

Exercice 8

Calculer le reste de la division euclidienne de $P(x) = x^n + x + 1$ par $(x - 1)^2$ (où n est un entier supérieur ou égal à 2).

Exercice 9

Soit P un polynôme tel que le reste de la division de $P(x)$ par $x + 1$ est 2 et le reste de la division de $P(x)$ par $x - 1$ est -4 .

Quel est le reste de la division de $P(x)$ par $x^2 - 1$?

Exercice 10

Factoriser les polynômes suivants.

1. $P_1(x) = 3x^3 + x^2$. En déduire la factorisation de $P_2(x) = 3x^3 + x^2 + 3x + 1$.
2. $P_3(x) = x^4 - 6x^2 + 8$.
3. $P_4(x) = x^4 - x^2 - 12$.
4. $P_5(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$ (vérifier que -2 est une racine).

Exercice 11

Déterminer l'ordre des racines des polynômes suivants :

1. $P_1(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.
2. $P_2(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

Exercice 12

Soit le polynôme $P(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$. À l'aide l'algorithme de Horner, calculer $P(5)$.
Même question avec le polynôme $P(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 10$ à évaluer en -4 .