

TD 3 : Fonctions logarithme et exponentielle

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(1 - 2x) = \ln(x + 2) + \ln 3$
2. $\ln(1 - x^2) = \ln(2x - 1)$
3. $\ln \sqrt{2x - 2} = \ln(4 - x) - \frac{1}{2} \ln x$
4. $2e^{2x} - 5e^x = -2$
5. $e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$
6. $\ln(2 - x) \leq \ln(2x + 1) - \ln(3)$
7. $\ln(3x + 2) \geq \ln\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$
8. $e^x > -3$
9. $\exp\left(1 + \frac{2}{x}\right) \leq e^x$

Exercice 2

Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie par :

- a) $f(x) = 3x + 2 - \ln x$; b) $f(x) = \frac{2x + \ln x}{x}$; c) $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x}$; d) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$;
 e) $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$; f) $f(x) = \exp\left(\frac{x + 3}{x^2 - 1}\right)$; g) $f(x) = xe^x - e^x + 1$

Exercice 3

1. Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$:
 a) $f(x) = x \ln x - x$; b) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$; c) $f(x) = \ln \sqrt{x}$; d) $f(x) = (\ln x)^2$; e) $\ln(x^2)$
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f sur son ensemble de définition :
 a) $f(x) = \exp(x^2 + 3x - 1)$; b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; c) $f(x) = e^{e^x}$; d) $f(x) = e^{\sqrt{x} \ln x}$

Exercice 4 (D'après sujet bac Amérique du Nord 2007)

PREMIÈRE PARTIE

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$$g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x + b), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x + 1)$.

On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée.

Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
variations de f	$+\infty$	0		$\frac{3}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\infty$	

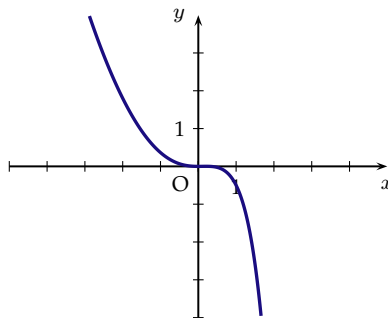
1. Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ($f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,057$ et $f(1) \simeq -0,099$).
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 5 _____ (D'après sujet bac Amérique du Sud 2010)

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , on ait :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x^2 e^{x-1}.$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$. Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



1. Quelle conjecture pourrait-on faire concernant le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3; 2]$ en observant cette courbe ?
Dans la suite du problème, on va s'intéresser à la validité de cette conjecture.
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = xg(x)$ où $g(x) = 1 - (x+2)e^{x-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
Pour la suite, on admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.
3. Étude du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
 - (a) Calculer les limites respectives de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
On pourra utiliser (en la démontrant) l'égalité : $g(x) = 1 - \frac{xe^x + 2e^x}{e}$.
 - (b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du nombre réel x .
 - (c) En déduire le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variation en y reportant les limites déterminées précédemment.
 - (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution.
On admet que $0,20 < \alpha < 0,21$.
 - (e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
4. Sens de variation de la fonction f
 - (a) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - (b) En déduire le sens de variation de la fonction f .
 - (c) Que pensez-vous de la conjecture de la question 1 ?

Exercice 6 _____

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3+x^4}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Calculer les dérivées première et seconde de f .
3. Déterminer les extrema de f .
4. Construire le tableau de variations de f . Les extrema de f sont-ils globaux ?
5. Que peut-on dire des extrema de f si on restreint l'étude de f à chaque intervalle du domaine de définition ?

PREMIÈRE PARTIE

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x + 2}$ et soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la fonction f (ensemble de définition, limites et asymptotes éventuelles, signe de la dérivée, tableau de variations).
2. En déduire les extrema de f . Les extrema de f sont-ils globaux ?
3. Que peut-on dire des extrema de f si on restreint l'étude de f à chaque intervalle du domaine de définition ?
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Effectuer la division euclidienne de $3x^2 + 4x - 1$ par $x + 2$.
6. En déduire toutes les asymptotes de $\mathcal{C}$.
7. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
8. Montrer que l'équation $f(x) = e$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; +\infty[$ (on donne $e \approx 2,7$).

DEUXIÈME PARTIE

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(f(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de g . On donne $\frac{-2 - \sqrt{7}}{3} \approx -1,5$ et $\frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \approx 0,2$.
2. Étudier les variations de g sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = 1$ sur $[1; +\infty[$.

On considère une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + ax + b + c \ln(x),$$

où a, b et c sont trois réels, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On suppose que $\mathcal{C}$ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points d'abscisse 1 et 4 et qu'elle passe par le point de coordonnées $(1; 0)$. En déduire que le triplet de paramètres $(a; b; c)$ satisfait le système d'équations

$$\begin{cases} a + c = -2 \\ a + \frac{c}{4} = -8 \\ a + b = -1 \end{cases}.$$

Résoudre ce système d'équations.

On suppose dans la suite que le triplet $(a; b; c)$ satisfait le système ci-dessus, soit

$$f(x) = x^2 - 10x + 9 + 8 \ln(x), \text{ pour tout } x > 0.$$

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. En déduire l'équation d'éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}$.
3. (a) Calculer la dérivée f' de f sur $]0; +\infty[$.
(b) Étudier le signe de f' sur $]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
(c) Justifier que f admet deux extrema locaux en 1 et 4. Quelles sont leurs valeurs ? Sont-ils globaux (justifier votre réponse) ?
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution notée α sur l'intervalle $]1; +\infty[$, où $\alpha > 4$. On donne $\ln(2) \simeq 0,69$.
(b) Déterminer le signe de f sur son domaine de définition.