

Recherche Opérationnelle

Épisode II

Généralités

Hervé Hocquard

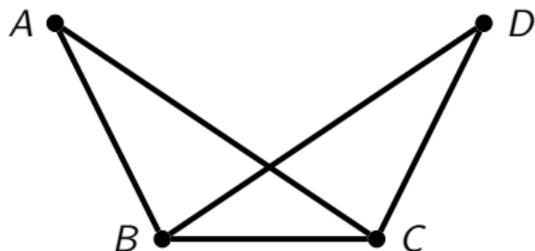
Université de Bordeaux, France

29 janvier 2023

1. Notions et terminologie de base

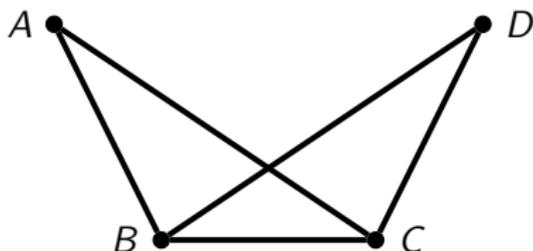
Graphe

Graphe = Sommets + Arêtes en liant des paires



Graphe

Graphe = Sommets + Arêtes en liant des paires



Note : Ici, **non-orienté**, **non-pondéré**, **sans boucle**, **simple**, ...

Sommets = Entités (villes, personnes, cours, etc.)

Arêtes = Relation entre paires d'entités (routes, affinité, contrainte, etc.)

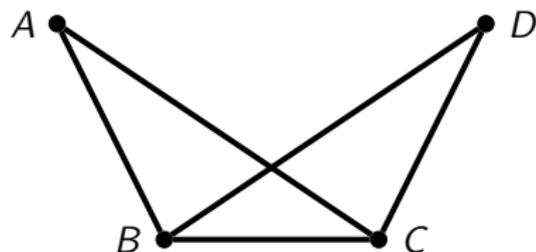
On notera $G = (V, E)$ un graphe G dont l'ensemble des sommets est V et dont l'ensemble des arêtes est E .

Notions et terminologie de base

- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.

Notions et terminologie de base

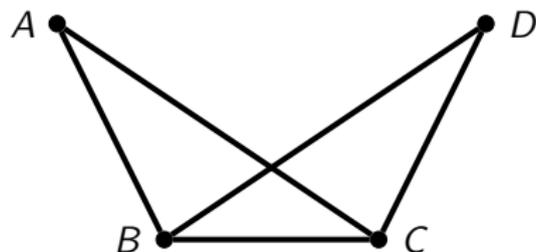
- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.



Ici :

Notions et terminologie de base

- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.

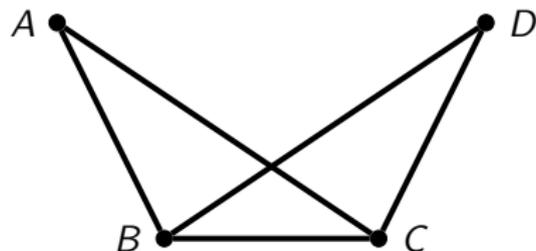


Ici :

- Graphe

Notions et terminologie de base

- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.

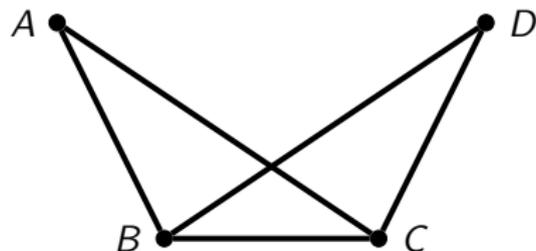


Ici :

- Graphe simple, sans boucle, non-complet, non-orienté

Notions et terminologie de base

- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.

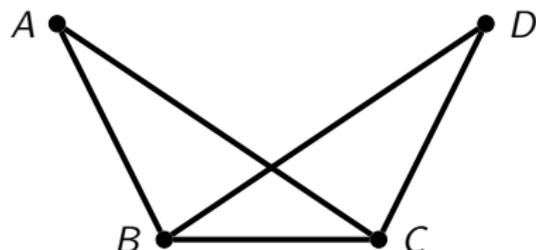


Ici :

- Graphe simple, sans boucle, non-complet, non-orienté d'ordre 4.

Notions et terminologie de base

- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.

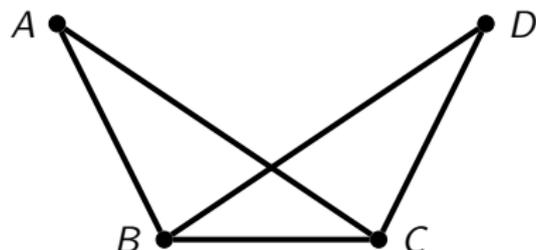


Ici :

- Graphe simple, sans boucle, non-complet, non-orienté d'ordre 4.
- Voisins de A :

Notions et terminologie de base

- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.

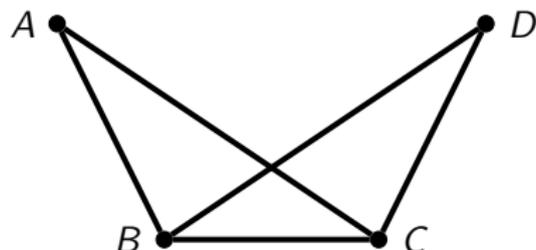


Ici :

- Graphe simple, sans boucle, non-complet, non-orienté d'ordre 4.
- Voisins de A : B et C.

Notions et terminologie de base

- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.

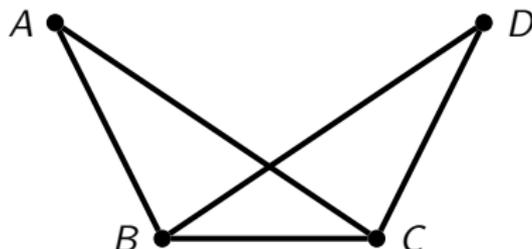


Ici :

- Graphe simple, sans boucle, non-complet, non-orienté d'ordre 4.
- Voisins de A : B et C. Donc A est de degré 2 (on notera $d_G(A) = 2 = d(A)$).

Notions et terminologie de base

- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.

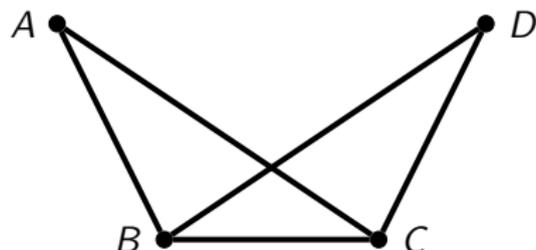


Ici :

- Graphe simple, sans boucle, non-complet, non-orienté d'ordre 4.
- Voisins de A : B et C . Donc A est de degré 2 (on notera $d_G(A) = 2 = d(A)$).
- Sommets adjacents à B :

Notions et terminologie de base

- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.

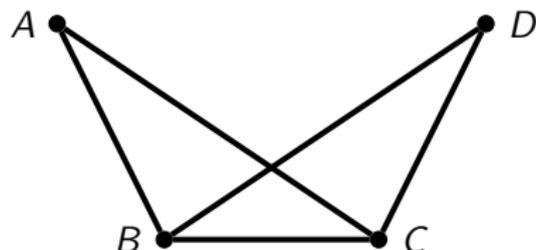


Ici :

- Graphe simple, sans boucle, non-complet, non-orienté d'ordre 4.
- Voisins de A : B et C . Donc A est de degré 2 (on notera $d_G(A) = 2 = d(A)$).
- Sommets adjacents à B : A , C et D .

Notions et terminologie de base

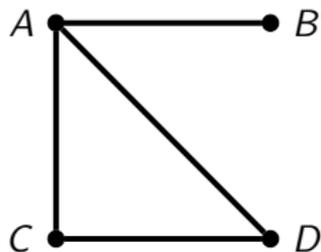
- Graphe **simple**, **sans boucle**, **complet**, **orienté**.
- **Sommet**, **ordre**.
- **Arête**, **arc**, **boucle**, **adjacence**, **voisin**, **degré**.



Ici :

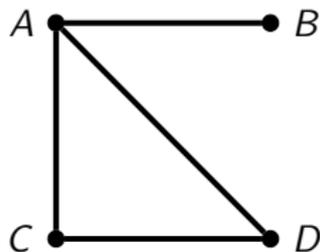
- Graphe simple, sans boucle, non-complet, non-orienté d'ordre 4.
- Voisins de A : B et C. Donc A est de degré 2 (on notera $d_G(A) = 2 = d(A)$).
- Sommets adjacents à B : A, C et D. Donc B est de degré 3.

Exemple 1



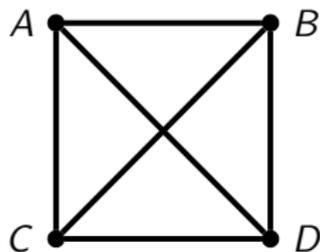
- Graphe d'ordre ?
- Simple ? Sans boucle ? Complet ? Orienté ?
- Voisins de B ? Voisins de A ?
- B et D sont-ils adjacents ?

Exemple 1



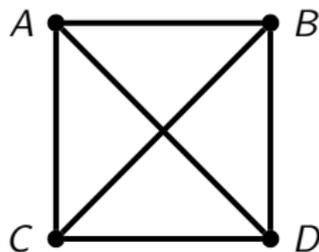
- Graphe d'ordre ? 4
- Simple ? *oui* Sans boucle ? *oui* Complet ? *non* Orienté ? *non*
- Voisins de B ? A Voisins de A ? B, C, D
- B et D sont-ils adjacents ? *non*

Exemple 2



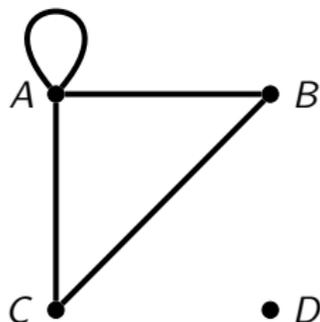
- Graphe d'ordre ?
- Simple ? Sans boucle ? Complet ? Orienté ?
- Voisins de B ? Voisins de A ?
- B et D sont-ils adjacents ?

Exemple 2



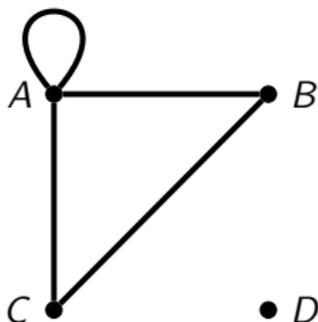
- Graphe d'ordre ? 4
- Simple ? *oui* Sans boucle ? *oui* Complet ? *oui* Orienté ? *non*
- Voisins de B ? *A, C, D* Voisins de A ? *B, C, D*
- B et D sont-ils adjacents ? *oui*

Exemple 3



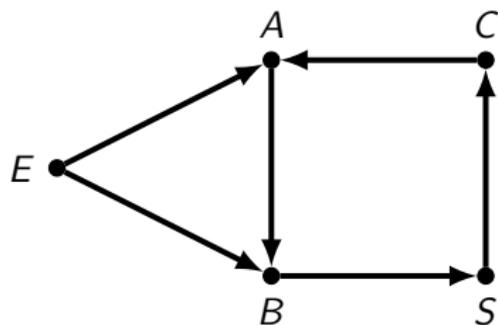
- Graphe d'ordre ?
- Simple? Sans boucle? Complet? Orienté?
- Voisins de D ? Voisins de A ?
- B et D sont-ils adjacents?

Exemple 3



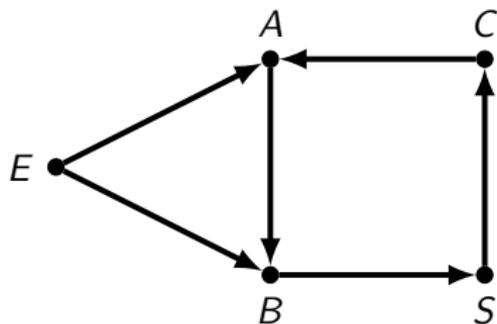
- Graphe d'ordre ? 4
- Simple ? *oui* Sans boucle ? *non* Complet ? *non* Orienté ? *non*
- Voisins de D ? \emptyset Voisins de A ? A, B, C
- B et D sont-ils adjacents ? *non*

Exemple 4



- Graphe d'ordre ?
- Simple ? Sans boucle ? Complet ? Orienté ?
- Voisins de E ? Voisins de S ?
- A et C sont-ils adjacents ?

Exemple 4



- Graphe d'ordre ? 5
- Simple ? *oui* Sans boucle ? *oui* Complet ? *non* Orienté ? *oui*
- Voisins de E ? A, B Voisins de S ? C
- A et C sont-ils adjacents ? *oui : A voisin de C , mais pas réciproque*

Tournoi de foot

Un lycée organise un tournoi de football durant lequel les équipes jouent toutes les unes contre les autres (exactement une fois).

Tournoi de foot

Un lycée organise un tournoi de football durant lequel les équipes jouent toutes les unes contre les autres (exactement une fois).

- 1 Schématiser la situation **à l'aide d'un graphe**, dans le cas où 4 équipes participent. Dans ce cas précis :
 - 1.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?
 - 1.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?

Tournoi de foot

Un lycée organise un tournoi de football durant lequel les équipes jouent toutes les unes contre les autres (exactement une fois).

- 1 Schématiser la situation **à l'aide d'un graphe**, dans le cas où 4 équipes participent. Dans ce cas précis :
 - 1.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?
 - 1.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?
- 2 Quid si 5 équipes participent au tournoi ?

Tournoi de foot

Un lycée organise un tournoi de football durant lequel les équipes jouent toutes les unes contre les autres (exactement une fois).

- 1 Schématiser la situation **à l'aide d'un graphe**, dans le cas où 4 équipes participent. Dans ce cas précis :
 - 1.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?
 - 1.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?
- 2 Quid si 5 équipes participent au tournoi ?
- 3 Quid pour 6 équipes ?

Tournoi de foot

Un lycée organise un tournoi de football durant lequel les équipes jouent toutes les unes contre les autres (exactement une fois).

- 1 Schématiser la situation **à l'aide d'un graphe**, dans le cas où 4 équipes participent. Dans ce cas précis :
 - 1.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?
 - 1.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?
- 2 Quid si 5 équipes participent au tournoi ?
- 3 Quid pour 6 équipes ?
- 4 Que peut-on déduire des résultats obtenus ?

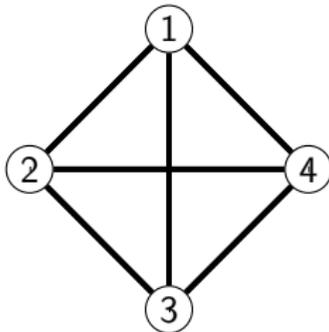
Schématisation pour 4 équipes

- 1 *Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 4 équipes participent.*

Schématisation pour 4 équipes

1 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 4 équipes participent.

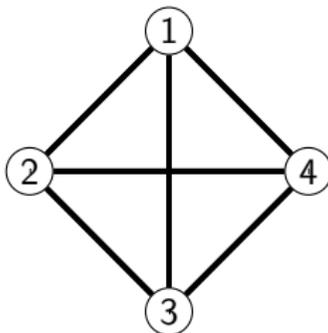
⇒ Équipes 1,2,3,4. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Schématisation pour 4 équipes

1 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 4 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



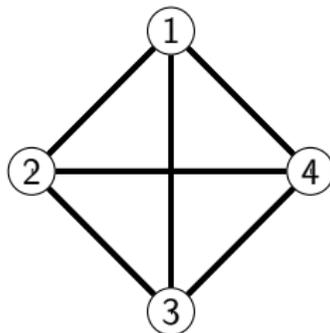
Dans ce cas précis :

1.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

Schématisation pour 4 équipes

1 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 4 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Dans ce cas précis :

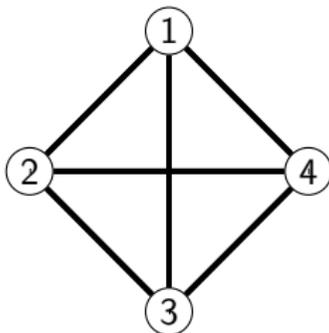
1.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

⇒ Nombre de matchs par équipe = Degré du sommet associé. Donc 3.

Schématisation pour 4 équipes

1 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 4 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Dans ce cas précis :

1.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

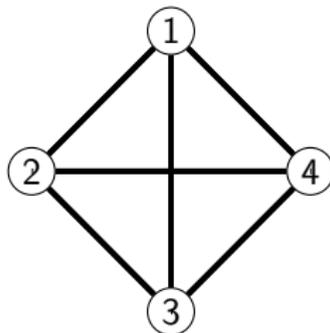
⇒ Nombre de matchs par équipe = Degré du sommet associé. Donc 3.

1.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?

Schématisation pour 4 équipes

1 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 4 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Dans ce cas précis :

1.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

⇒ Nombre de matchs par équipe = Degré du sommet associé. Donc 3.

1.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?

⇒ Nombre d'arêtes. Donc 6.

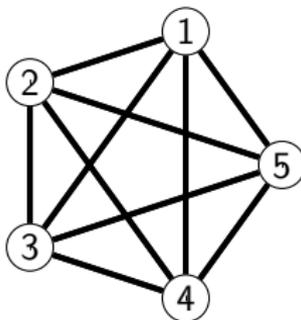
Schématisation pour 5 équipes

2 Schématiser la situation à l'aide d'un **graphe**, dans le cas où 5 équipes participent.

Schématisation pour 5 équipes

2 Schématiser la situation à l'aide d'un **graphe**, dans le cas où 5 équipes participent.

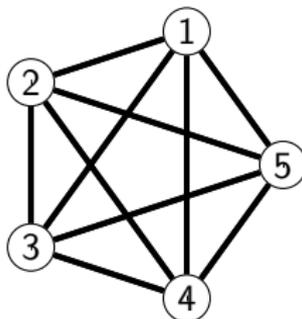
⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Schématisation pour 5 équipes

2 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 5 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



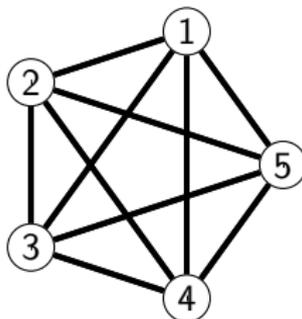
Dans ce cas précis :

2.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

Schématisation pour 5 équipes

2 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 5 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Dans ce cas précis :

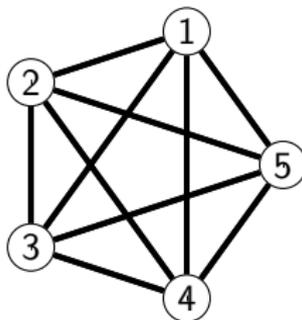
2.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

⇒ Nombre de matchs par équipe = Degré du sommet associé. Donc 4.

Schématisation pour 5 équipes

2 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 5 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Dans ce cas précis :

2.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

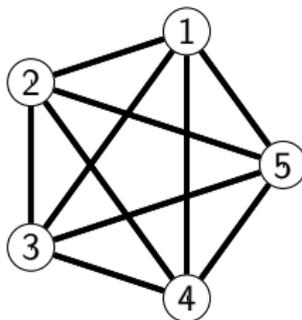
⇒ Nombre de matchs par équipe = Degré du sommet associé. Donc 4.

2.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?

Schématisation pour 5 équipes

2 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 5 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Dans ce cas précis :

2.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

⇒ Nombre de matchs par équipe = Degré du sommet associé. Donc 4.

2.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?

⇒ Nombre d'arêtes. Donc 10.

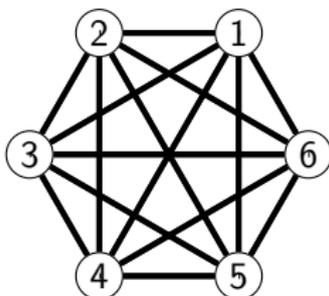
Schématisation pour 6 équipes

3 Schématiser la situation à l'aide d'un **graphe**, dans le cas où 6 équipes participent.

Schématisation pour 6 équipes

3 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 6 équipes participent.

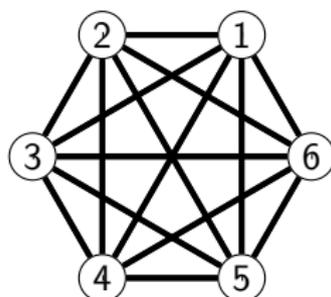
⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5, 6. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Schématisation pour 6 équipes

3 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 6 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5, 6. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



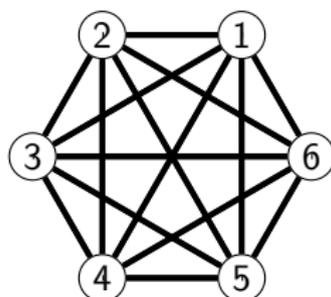
Dans ce cas précis :

3.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

Schématisation pour 6 équipes

3 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 6 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5, 6. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Dans ce cas précis :

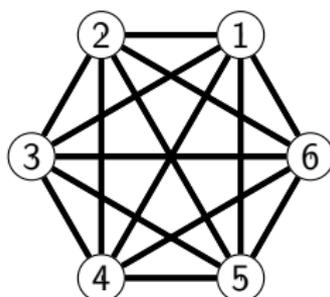
3.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

⇒ Nombre de matchs par équipe = Degré du sommet associé. Donc 5.

Schématisation pour 6 équipes

3 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 6 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5, 6. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Dans ce cas précis :

3.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

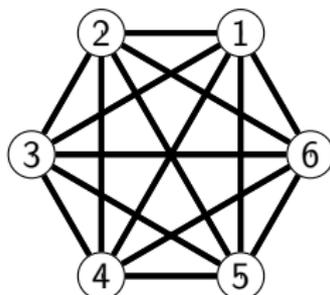
⇒ Nombre de matchs par équipe = Degré du sommet associé. Donc 5.

3.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?

Schématisation pour 6 équipes

3 Schématiser la situation à l'aide d'un graphe, dans le cas où 6 équipes participent.

⇒ Équipes 1, 2, 3, 4, 5, 6. Un sommet = Une équipe. Une arête = Un match.



Dans ce cas précis :

3.1 Quel est le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

⇒ Nombre de matchs par équipe = Degré du sommet associé. Donc 5.

3.2 Quel est le nombre total de matchs joués ?

⇒ Nombre d'arêtes. Donc 15.

4 *Que peut-on déduire des résultats obtenus ?*

Analyse des résultats obtenus

4 *Que peut-on déduire des résultats obtenus ?*

⇒ *La méthode se généralise à un nombre n quelconque d'équipes inscrites :*

Analyse des résultats obtenus

4 *Que peut-on déduire des résultats obtenus ?*

⇒ *La méthode se généralise à un nombre n quelconque d'équipes inscrites :*

- *Chaque équipe va jouer $n - 1$ matchs ;*

Analyse des résultats obtenus

4 *Que peut-on déduire des résultats obtenus ?*

⇒ *La méthode se généralise à un nombre n quelconque d'équipes inscrites :*

- *Chaque équipe va jouer $n - 1$ matchs ;*
- *Au total, $\frac{n(n-1)}{2}$ matchs vont être joués.*

n	degré	arêtes
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
...

Analyse des résultats obtenus

4 Que peut-on déduire des résultats obtenus ?

⇒ La méthode se généralise à un nombre n quelconque d'équipes inscrites :

- Chaque équipe va jouer $n - 1$ matchs ;
- Au total, $\frac{n(n-1)}{2}$ matchs vont être joués.

n	degré	arêtes
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
...

Déduit uniquement via les graphes associés !

Remarque

Le graphe à n sommets tel que tous les sommets sont adjacents s'appelle un graphe complet à n sommets et se note K_n . Il est composé de $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Remarque

Le graphe à n sommets tel que tous les sommets sont adjacents s'appelle un graphe complet à n sommets et se note K_n . Il est composé de $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Remarque

Pour tout sommet v d'un graphe simple à n sommets on a

$$0 \leq d(v) \leq n - 1.$$

Remarques et une première propriété

Remarque

Le graphe à n sommets tel que tous les sommets sont adjacents s'appelle un graphe complet à n sommets et se note K_n . Il est composé de $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Remarque

Pour tout sommet v d'un graphe simple à n sommets on a

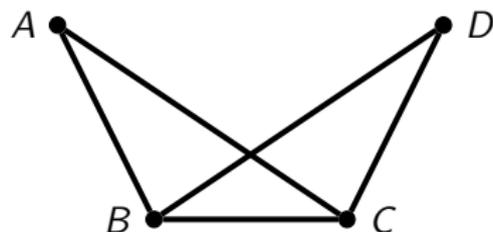
$$0 \leq d(v) \leq n - 1.$$

Lemme des poignées de mains

La somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \times |E|.$$

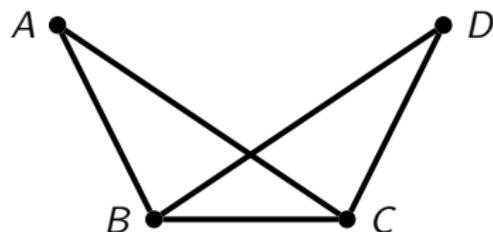
2. Chaînes et cycles



Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

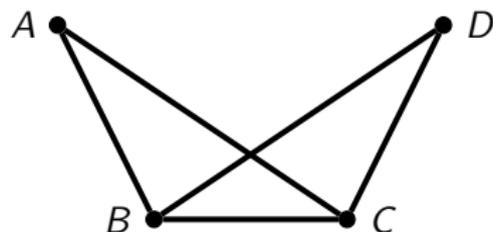


Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

- $A - B - C$

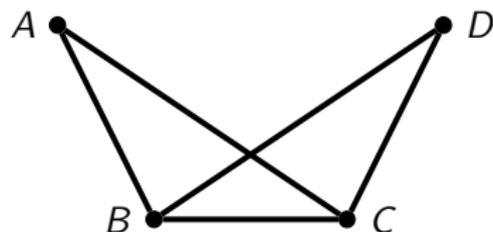


Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

- $A - B - C$ est une chaîne, non cycle, sans répétition ;

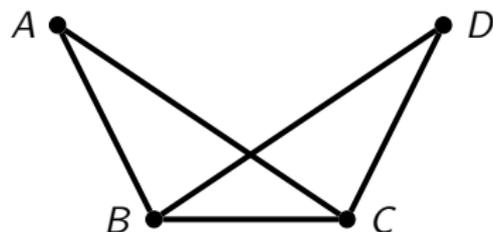


Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

- $A - B - C$ est une chaîne, non cycle, sans répétition ;
- $A - C - D - A$

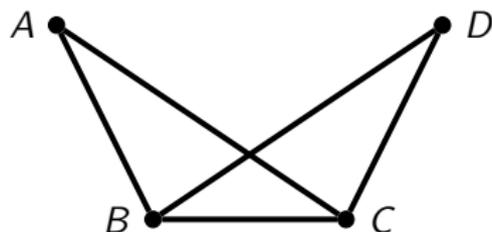


Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

- $A - B - C$ est une chaîne, non cycle, sans répétition ;
- $A - C - D - A$ n'est pas une chaîne ;

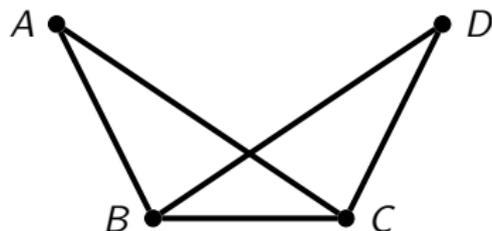


Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

- $A - B - C$ est une chaîne, non cycle, sans répétition ;
- $A - C - D - A$ n'est pas une chaîne ;
- $A - B - C - D - C - A$

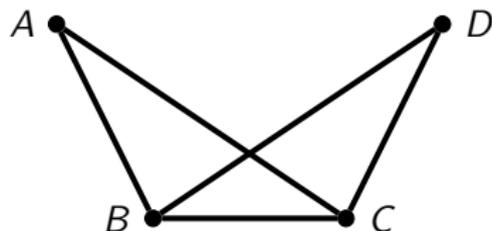


Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

- $A - B - C$ est une chaîne, non cycle, sans répétition ;
- $A - C - D - A$ n'est pas une chaîne ;
- $A - B - C - D - C - A$ est un cycle avec répétition de longueur

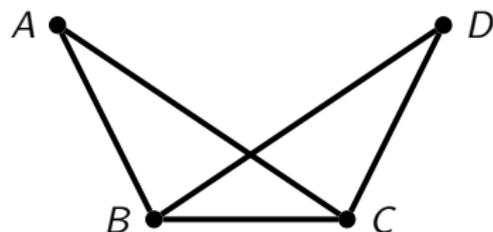


Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

- $A - B - C$ est une chaîne, non cycle, sans répétition ;
- $A - C - D - A$ n'est pas une chaîne ;
- $A - B - C - D - C - A$ est un cycle avec répétition de longueur 5.

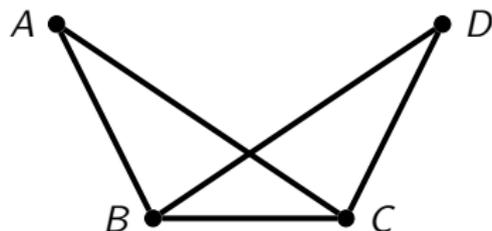


Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

- $A - B - C$ est une chaîne, non cycle, sans répétition ;
- $A - C - D - A$ n'est pas une chaîne ;
- $A - B - C - D - C - A$ est un cycle avec répétition de longueur 5.
- Graphe



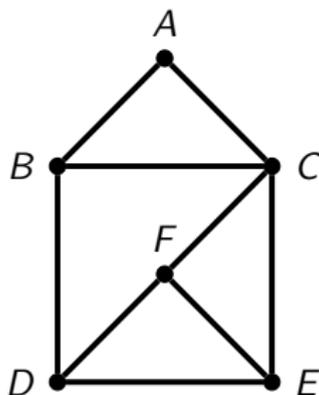
Chaînes, cycles

- **Chaîne/Chemin** (avec ou sans répétition).
- **Cycle/Circuit** (avec ou sans répétition).
- **Longueur** d'une chaîne ou d'un cycle.
- Graphe **connexe**.

Ici :

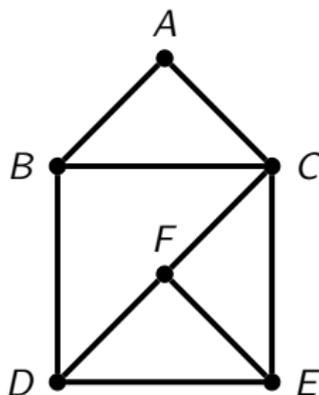
- $A - B - C$ est une chaîne, non cycle, sans répétition ;
- $A - C - D - A$ n'est pas une chaîne ;
- $A - B - C - D - C - A$ est un cycle avec répétition de longueur 5.
- Graphe connexe.

Exemple



- Graphe d'ordre ?
- Simple ? Sans boucle ? Complet ? Orienté ? **Connexe ?**
- Voisins de B ? Voisins de A ?
- $A - B - F - C - A$ **cycle ?**
- $A - B - D - F - C - A$ **cycle de longueur ?**

Exemple

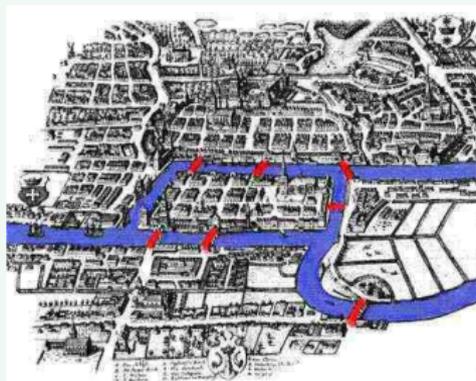


- Graphe d'ordre ? **6**
- Simple ? **oui** Sans boucle ? **oui** Complet ? **non** Orienté ? **non** Connexe ? **oui**
- Voisins de B ? A, C, D Voisins de A ? B, C
- $A - B - F - C - A$ cycle ? **non**
- $A - B - D - F - C - A$ cycle de longueur ? **5**

Deuxième modélisation : les ponts de Königsberg

Visite de Königsberg

En 1736, alors en visite à Königsberg, Leonhard Euler souhaite visiter chaque berge et chaque île de Königsberg, constituée de sept ponts. Il souhaite le faire, en choisissant bien son point de départ, 1) en passant **exactement une fois** par chaque pont, avant de 2) revenir à son point de départ. La ville se présente comme suit :



1 Est-ce possible ???

Les ponts de Königsberg : solution

1 *Est-ce possible ???*

Les ponts de Königsberg : solution

1 *Est-ce possible ???*

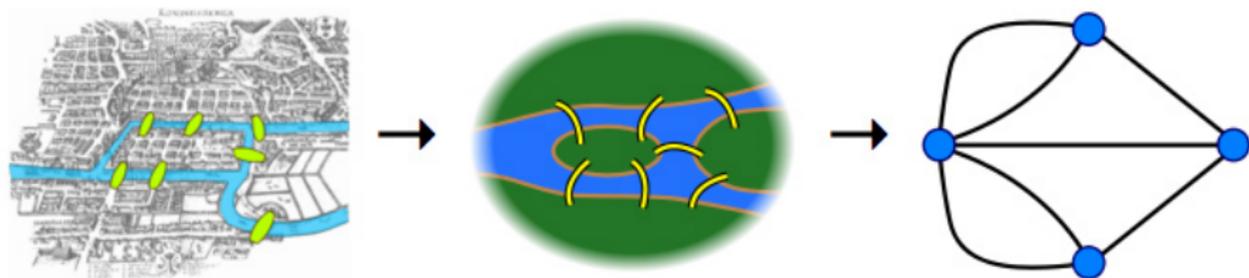
⇒ *Non ! Mais pourquoi ? Énumération pas viable, car se généralise mal.*

Les ponts de Königsberg : solution

1 *Est-ce possible ???*

⇒ *Non ! Mais pourquoi ? Énumération pas viable, car se généralise mal.*

Formalisme de graphes ?



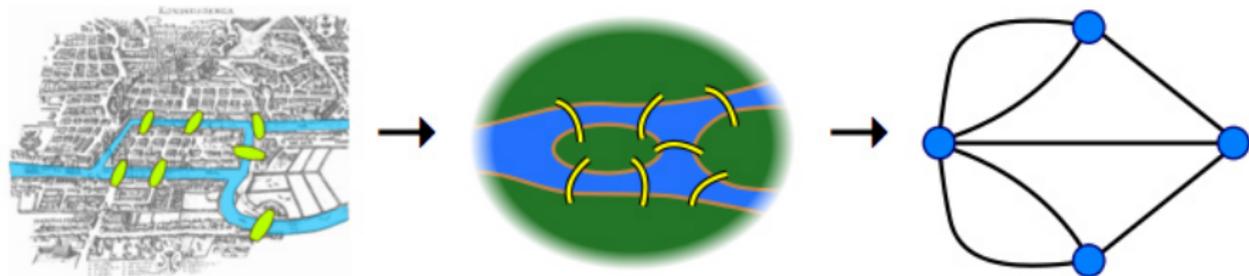
On cherche...

Les ponts de Königsberg : solution

1 *Est-ce possible ???*

⇒ *Non ! Mais pourquoi ? Énumération pas viable, car se généralise mal.*

Formalisme de graphes ?



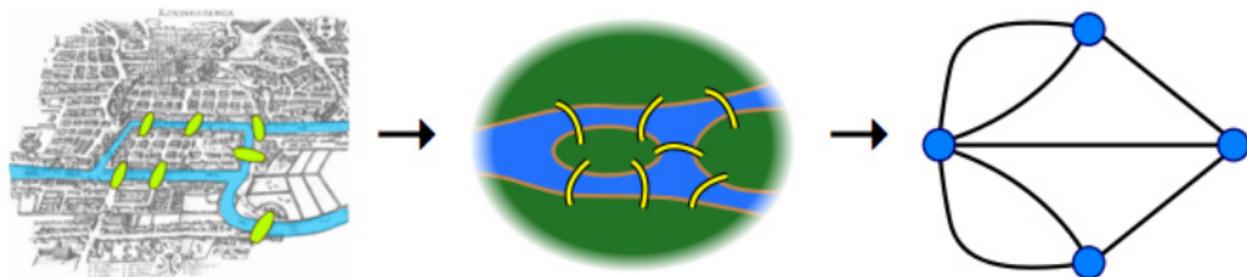
On cherche... *un cycle "traversant" chaque arête une fois = cycle eulérien.*
(= cycle, tracé sans lever le crayon, passant par chaque arête)

Les ponts de Königsberg : solution

1 Est-ce possible ???

⇒ *Non ! Mais pourquoi ? Énumération pas viable, car se généralise mal.*

Formalisme de graphes ?



On cherche... *un cycle "traversant" chaque arête une fois = cycle eulérien.*
(= cycle, tracé sans lever le crayon, passant par chaque arête)

Nouvelle question

Quand un graphe a-t-il un cycle eulérien ?

Graphes eulériens

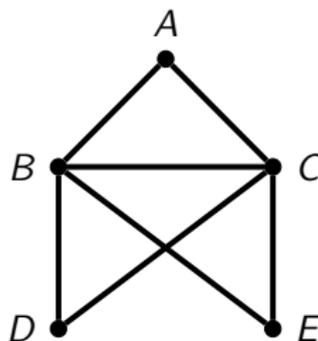
Graphe eulérien = Graphe ayant un cycle eulérien.

Graphes eulériens

Grphe eulérien = Grphe ayant un cycle eulérien.

Théorème (Euler – 1736)

Un graphe **connexe** est eulérien ssi tous ses sommets sont de degré pair.

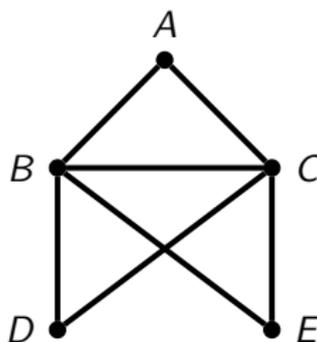


Graphes eulériens

Grphe eulérien = Graphe ayant un cycle eulérien.

Théorème (Euler – 1736)

Un graphe **connexe** est eulérien ssi tous ses sommets sont de degré pair.



sommet	A	B	C	D	E
degré	2	4	4	2	2

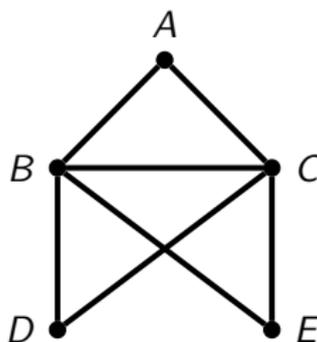
Eulérien ?

Graphes eulériens

Grphe eulérien = Graphe ayant un cycle eulérien.

Théorème (Euler – 1736)

Un graphe **connexe** est eulérien ssi tous ses sommets sont de degré pair.



sommet	A	B	C	D	E
degré	2	4	4	2	2

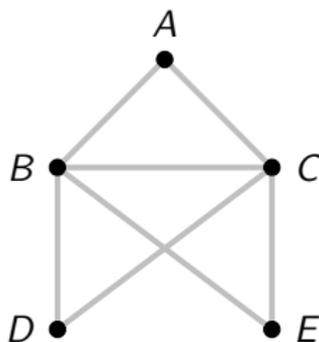
Eulérien ? *oui!*

Remarque sur le théorème d'Euler

Remarque : Si un cycle eulérien existe, le théorème ne fait qu'indiquer son existence... comment le trouver ?

Remarque sur le théorème d'Euler

Remarque : Si un cycle eulérien existe, le théorème ne fait qu'indiquer son existence... comment le trouver ?

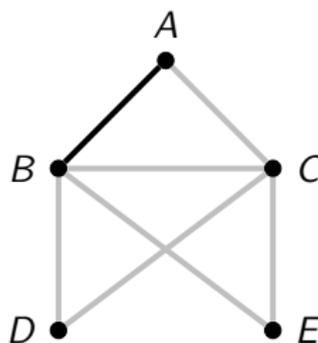


Algorithme d'Euler :

- 1 Partir d'un sommet X .
- 2 Naviguer de sommet en sommet en empruntant de nouvelles arêtes.
- 3 Dès qu'on revient à X :
 - 1 Si toutes les arêtes ont été traversées, c'est gagné.
 - 2 Sinon, on déduit un autre cycle dans l'une des composantes eulériennes restantes, et on l'inclut au cycle précédent.

Remarque sur le théorème d'Euler

Remarque : Si un cycle eulérien existe, le théorème ne fait qu'indiquer son existence... comment le trouver ?

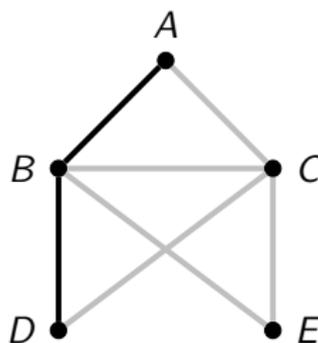


Algorithme d'Euler :

- 1 Partir d'un sommet X .
- 2 Naviguer de sommet en sommet en empruntant de nouvelles arêtes.
- 3 Dès qu'on revient à X :
 - 1 Si toutes les arêtes ont été traversées, c'est gagné.
 - 2 Sinon, on déduit un autre cycle dans l'une des composantes eulériennes restantes, et on l'inclut au cycle précédent.

Remarque sur le théorème d'Euler

Remarque : Si un cycle eulérien existe, le théorème ne fait qu'indiquer son existence... comment le trouver ?

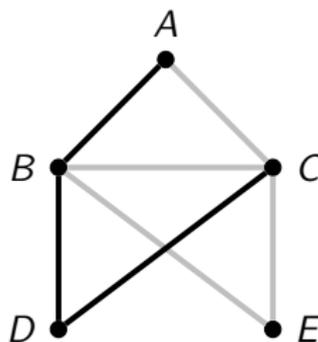


Algorithme d'Euler :

- 1 Partir d'un sommet X .
- 2 Naviguer de sommet en sommet en empruntant de nouvelles arêtes.
- 3 Dès qu'on revient à X :
 - 1 Si toutes les arêtes ont été traversées, c'est gagné.
 - 2 Sinon, on déduit un autre cycle dans l'une des composantes eulériennes restantes, et on l'inclut au cycle précédent.

Remarque sur le théorème d'Euler

Remarque : Si un cycle eulérien existe, le théorème ne fait qu'indiquer son existence... comment le trouver ?

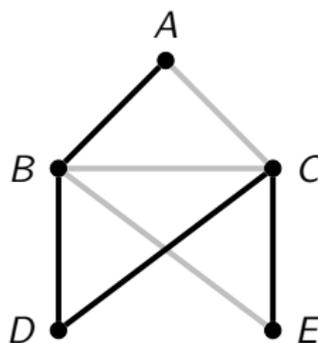


Algorithme d'Euler :

- 1 Partir d'un sommet X .
- 2 Naviguer de sommet en sommet en empruntant de nouvelles arêtes.
- 3 Dès qu'on revient à X :
 - 1 Si toutes les arêtes ont été traversées, c'est gagné.
 - 2 Sinon, on déduit un autre cycle dans l'une des composantes eulériennes restantes, et on l'inclut au cycle précédent.

Remarque sur le théorème d'Euler

Remarque : Si un cycle eulérien existe, le théorème ne fait qu'indiquer son existence... comment le trouver ?

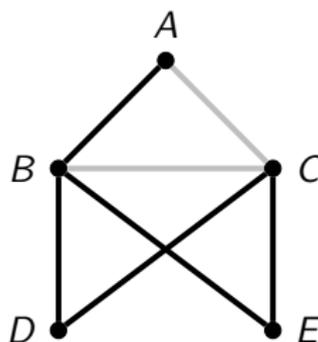


Algorithme d'Euler :

- 1 Partir d'un sommet X .
- 2 Naviguer de sommet en sommet en empruntant de nouvelles arêtes.
- 3 Dès qu'on revient à X :
 - 1 Si toutes les arêtes ont été traversées, c'est gagné.
 - 2 Sinon, on déduit un autre cycle dans l'une des composantes eulériennes restantes, et on l'inclut au cycle précédent.

Remarque sur le théorème d'Euler

Remarque : Si un cycle eulérien existe, le théorème ne fait qu'indiquer son existence... comment le trouver ?

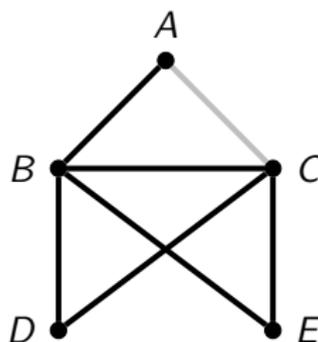


Algorithme d'Euler :

- 1 Partir d'un sommet X .
- 2 Naviguer de sommet en sommet en empruntant de nouvelles arêtes.
- 3 Dès qu'on revient à X :
 - 1 Si toutes les arêtes ont été traversées, c'est gagné.
 - 2 Sinon, on déduit un autre cycle dans l'une des composantes eulériennes restantes, et on l'inclut au cycle précédent.

Remarque sur le théorème d'Euler

Remarque : Si un cycle eulérien existe, le théorème ne fait qu'indiquer son existence... comment le trouver ?

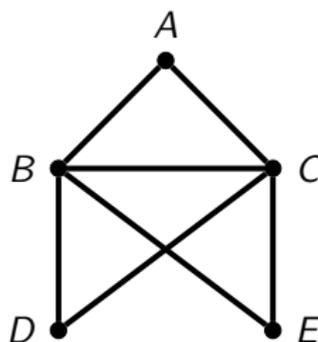


Algorithme d'Euler :

- 1 Partir d'un sommet X .
- 2 Naviguer de sommet en sommet en empruntant de nouvelles arêtes.
- 3 Dès qu'on revient à X :
 - 1 Si toutes les arêtes ont été traversées, c'est gagné.
 - 2 Sinon, on déduit un autre cycle dans l'une des composantes eulériennes restantes, et on l'inclut au cycle précédent.

Remarque sur le théorème d'Euler

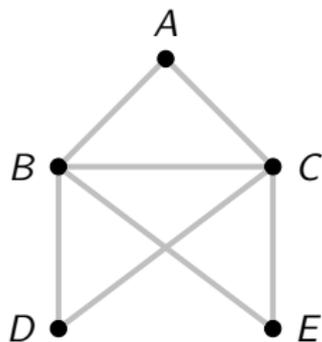
Remarque : Si un cycle eulérien existe, le théorème ne fait qu'indiquer son existence... comment le trouver ?



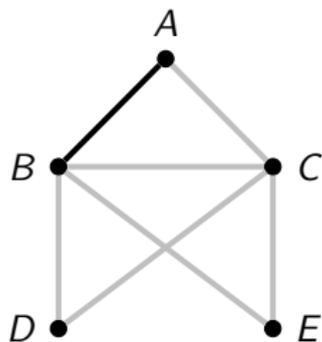
Algorithme d'Euler :

- 1 Partir d'un sommet X .
- 2 Naviguer de sommet en sommet en empruntant de nouvelles arêtes.
- 3 Dès qu'on revient à X :
 - 1 Si toutes les arêtes ont été traversées, c'est gagné.
 - 2 Sinon, on déduit un autre cycle dans l'une des composantes eulériennes restantes, et on l'inclut au cycle précédent.

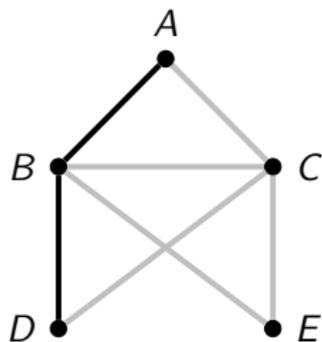
“Coller” deux cycles



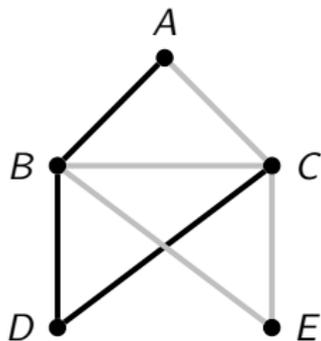
“Coller” deux cycles



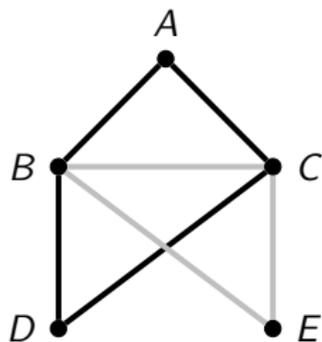
“Coller” deux cycles



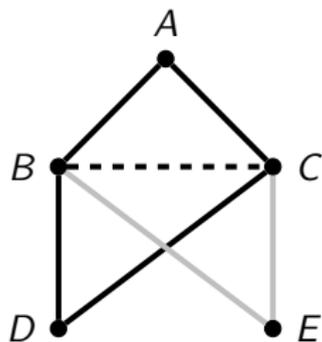
“Coller” deux cycles



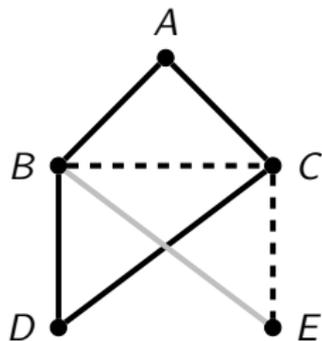
“Coller” deux cycles



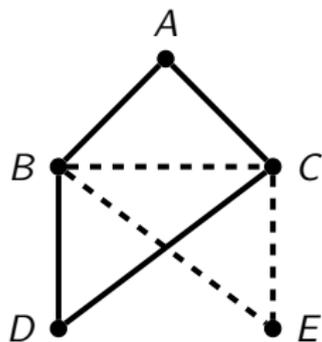
“Coller” deux cycles



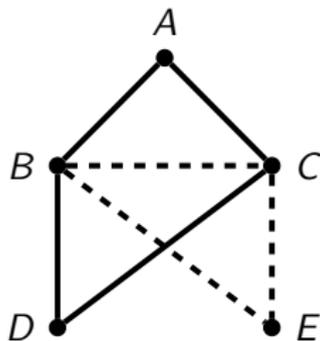
“Coller” deux cycles



“Coller” deux cycles

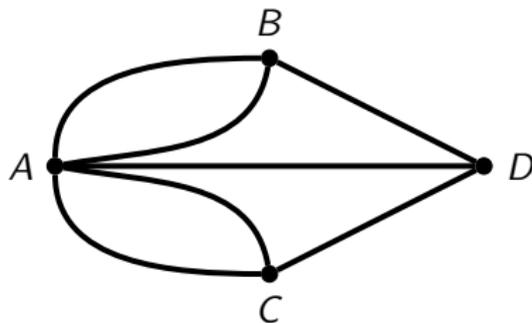
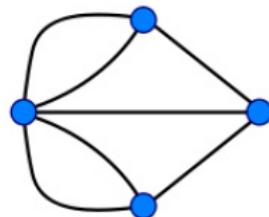
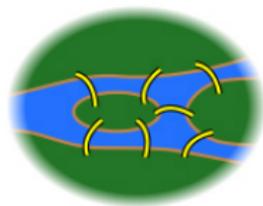
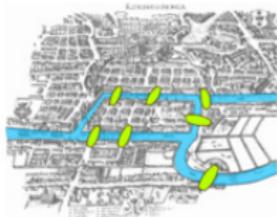


“Coller” deux cycles

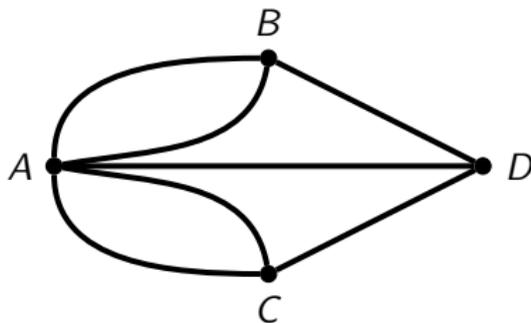
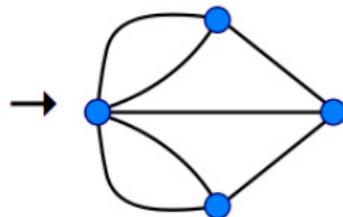
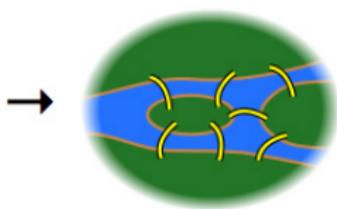
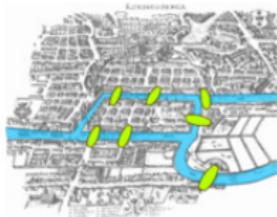


⇒ On parcourt le cycle plein. En arrivant à B ou C , on parcourt le cycle en pointillés intégralement. Puis on finit le parcours du cycle plein.

Retour à Königsberg...

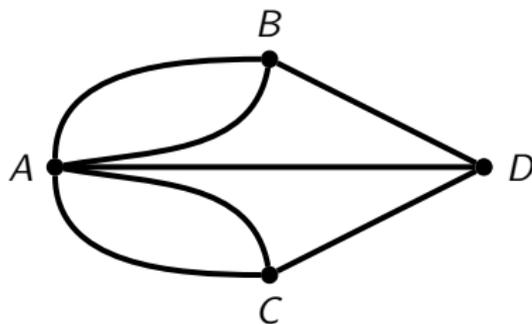
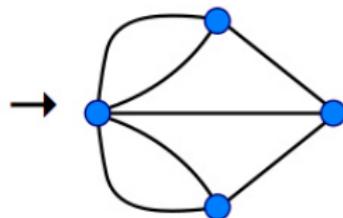
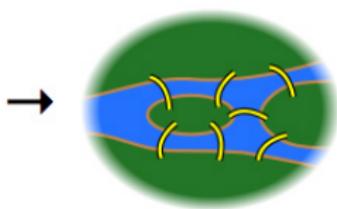
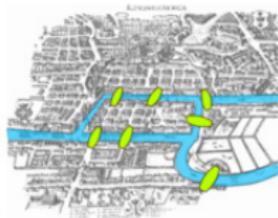


Retour à Königsberg...



sommet	A	B	C	D
degré	5	3	3	3

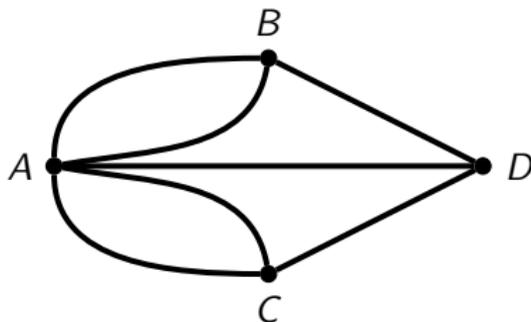
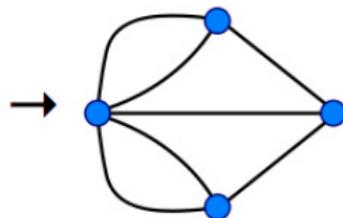
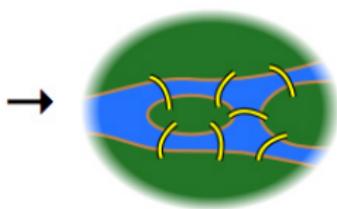
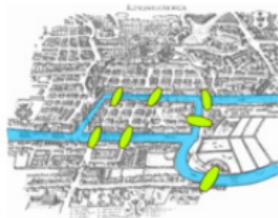
Retour à Königsberg...



sommet	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
degré	5	3	3	3

Eulérien ?

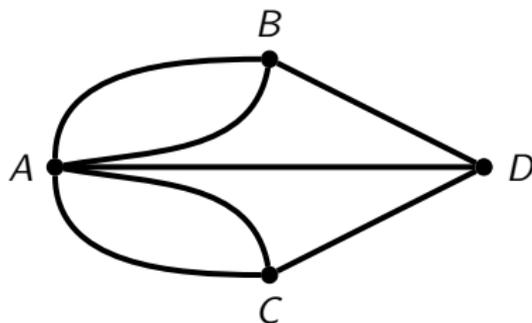
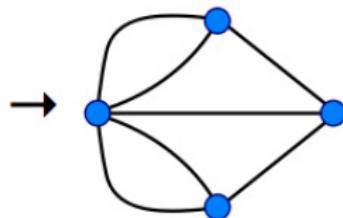
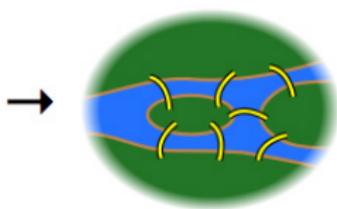
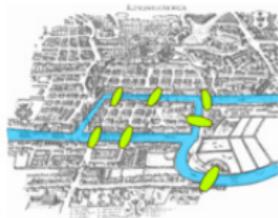
Retour à Königsberg...



sommet	A	B	C	D
degré	5	3	3	3

Eulérien ? *non...*

Retour à Königsberg...



sommet	A	B	C	D
degré	5	3	3	3

Eulérien ? *non... donc pas de "bon parcours" de Königsberg !*

Cycle eulérien – Une arête = **Chemin eulérien**.

Cycle eulérien – Une arête = **Chemin eulérien**.

Théorème (Euler – 1736)

Un graphe connexe a un chemin eulérien ssi il a au plus deux sommets de degré impair.

... car ajouter une arête entre ces deux sommets donne un cycle eulérien.

3. Représentation matricielle

Matrices

- **Matrice de taille $m \times n$** = Tableau de m lignes et n colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- **Matrice d'ordre n** = Matrice carrée $n \times n$.
- $a_{i,j}$ = Coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3,2 & 8 \\ 4 & -7 & 17 \\ -24 & 0,8 & 42 \end{pmatrix}$$

- Matrice carrée ?
- $a_{1,1} = ?$ $a_{3,2} = ?$

Exemple

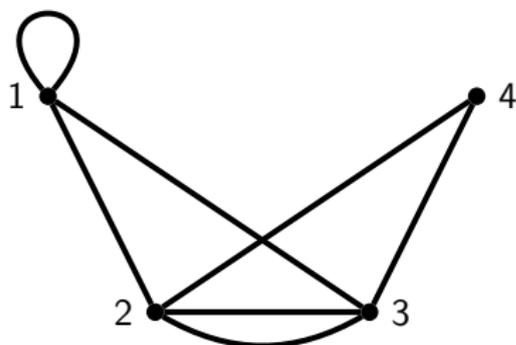
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3,2 & 8 \\ 4 & -7 & 17 \\ -24 & 0,8 & 42 \end{pmatrix}$$

- Matrice carrée ? *oui, d'ordre 3*
- $a_{1,1} = ? 1$ $a_{3,2} = ? 0,8$

Représenter un graphe par une matrice

Matrice d'adjacence d'un graphe

Pour un graphe G à n sommets $1, \dots, n$, la **matrice d'adjacence** de G est la matrice carrée d'ordre n où chaque coefficient $a_{i,j}$ indique le nombre d'arêtes entre i et j (l'ordre des sommets étant $1, \dots, n$).



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelques remarques

- Plusieurs matrices possibles décrivent un graphe. En effet, pour un graphe d'ordre n , il y a $n!$ matrices différentes.

Quelques remarques

- Plusieurs matrices possibles décrivent un graphe. En effet, pour un graphe d'ordre n , il y a $n!$ matrices différentes.
- La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est **symétrique**.

Quelques remarques

- Plusieurs matrices possibles décrivent un graphe. En effet, pour un graphe d'ordre n , il y a $n!$ matrices différentes.
- La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est **symétrique**.
- Les boucles sont visibles sur la diagonale $a_{1,1} \rightarrow a_{n,n}$.

Quelques remarques

- Plusieurs matrices possibles décrivent un graphe. En effet, pour un graphe d'ordre n , il y a $n!$ matrices différentes.
- La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est **symétrique**.
- Les boucles sont visibles sur la diagonale $a_{1,1} \rightarrow a_{n,n}$.
- Dans le cas orienté, on indique le nombre d'arcs sortants.

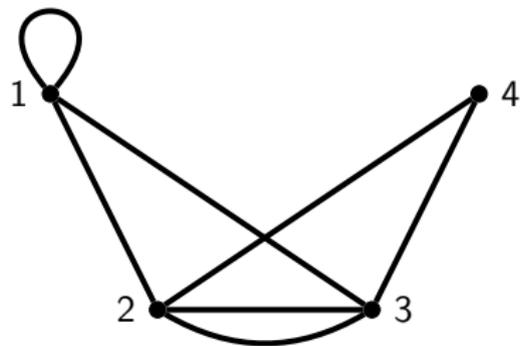
- Plusieurs matrices possibles décrivent un graphe. En effet, pour un graphe d'ordre n , il y a $n!$ matrices différentes.
- La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est **symétrique**.
- Les boucles sont visibles sur la diagonale $a_{1,1} \rightarrow a_{n,n}$.
- Dans le cas orienté, on indique le nombre d'arcs sortants.

Théorème (Folklore)

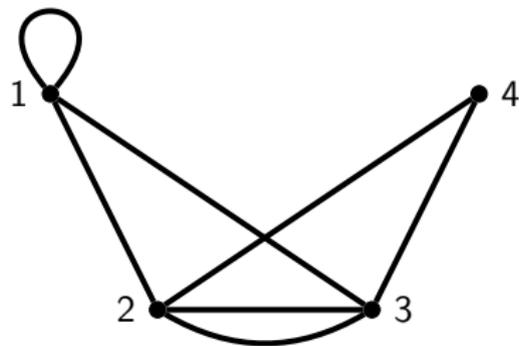
Si A est la matrice d'adjacence de G , alors, dans A^p , le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur p de i à j dans G .

Note : Ces chemins peuvent avoir des répétitions.

Exemple

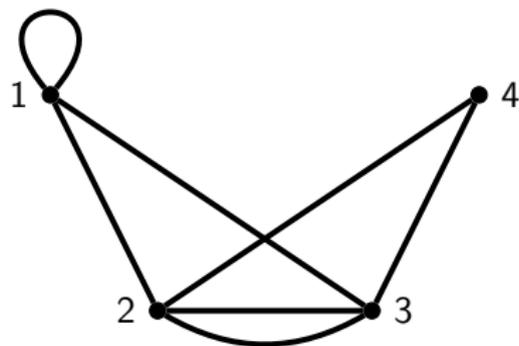


Example



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

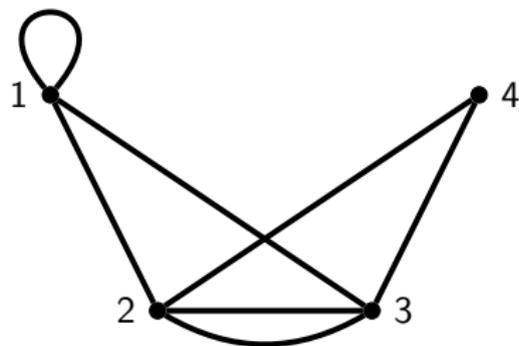
Example



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Example

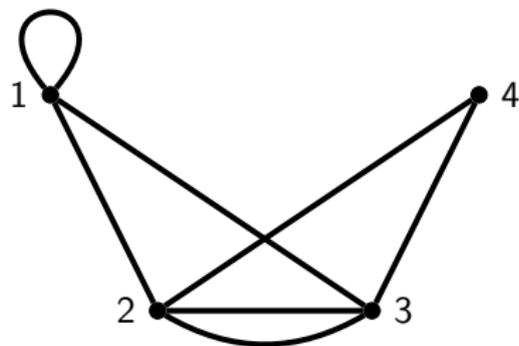


$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 11 & 6 \\ 11 & 9 & 17 & 8 \\ 11 & 17 & 9 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemple



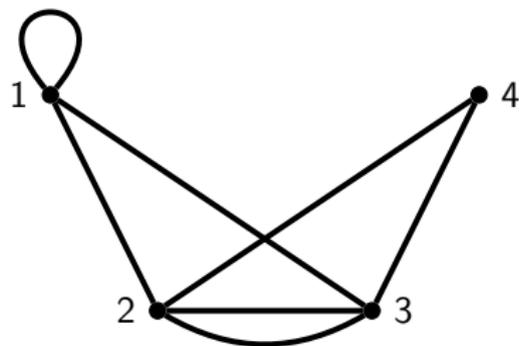
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 11 & 6 \\ 11 & 9 & 17 & 8 \\ 11 & 17 & 9 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

- Deux chemins $2 \rightarrow 3$ de longueur 2 :

Exemple



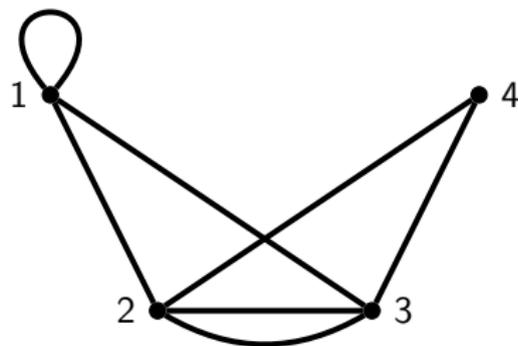
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 11 & 6 \\ 11 & 9 & 17 & 8 \\ 11 & 17 & 9 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

- Deux chemins $2 \rightarrow 3$ de longueur 2 : $2 - 1 - 3$, $2 - 4 - 3$;

Exemple



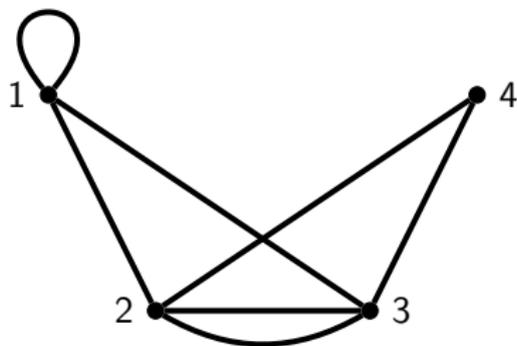
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 11 & 6 \\ 11 & 9 & 17 & 8 \\ 11 & 17 & 9 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

- Deux chemins $2 \rightarrow 3$ de longueur 2 : $2 - 1 - 3$, $2 - 4 - 3$;
- Quatre cycles $4 \rightarrow 4$ de longueur 3 :

Exemple



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 11 & 6 \\ 11 & 9 & 17 & 8 \\ 11 & 17 & 9 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

- Deux chemins $2 \rightarrow 3$ de longueur 2 : $2 - 1 - 3$, $2 - 4 - 3$;
- Quatre cycles $4 \rightarrow 4$ de longueur 3 : $4 - 2 - 3 - 4$ ($\times 2$), $4 - 3 - 2 - 4$ ($\times 2$).

Produit matriciel

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Par définition, le produit de A par B , noté $A \times B$ ou AB , est la matrice $(\sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}$ de taille $p \times r$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \times B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pq} \\ \bullet & \dots & & \dots & \bullet \\ \vdots & & & & \vdots \\ \bullet & \dots & & \dots & \bullet \\ \vdots & & & & \vdots \\ \bullet & \dots & & \dots & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \dots & \bullet \end{pmatrix} = AB$$

Remarques

- Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le résultat a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B .

Remarques

- Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le résultat a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B .
- En général $A \times B \neq B \times A$ (le produit n'est pas commutatif), il se peut que $A \times B$ soit défini, mais pas $B \times A$.

Remarques

- Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le résultat a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B .
- En général $A \times B \neq B \times A$ (le produit n'est pas commutatif), il se peut que $A \times B$ soit défini, mais pas $B \times A$.
- Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune de ces matrices soit nulle.

Remarques

- Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le résultat a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B .
- En général $A \times B \neq B \times A$ (le produit n'est pas commutatif), il se peut que $A \times B$ soit défini, mais pas $B \times A$.
- Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune de ces matrices soit nulle.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Plus courts chemins

Graphe pondéré

Poids = Entier positif.

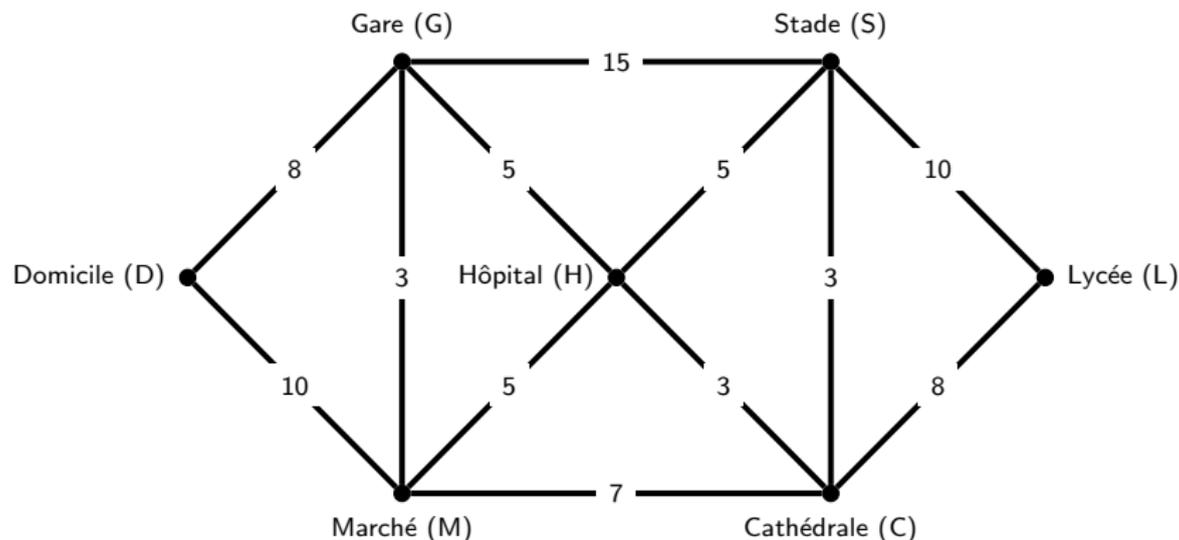
Graphe **pondéré** = Graphe dont les arêtes sont attribuées un poids.

Poids d'un chemin/cycle = Somme des poids des arêtes traversées.

Chemin **le plus court** entre deux sommets = Chemin (sans répétition) liant les deux sommets, **dont le poids est minimum**.

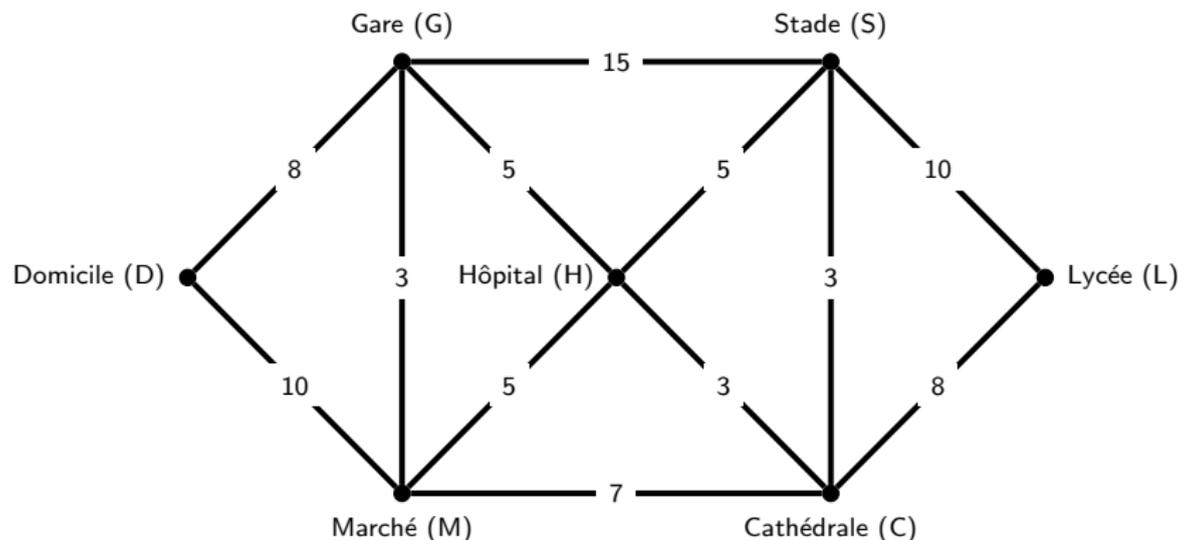
Applications évidentes (GPS, etc.).

Exemple



- Graphe pondéré?
- Poids de $D - M - H - C$?
- Chaîne $D \rightarrow C$ plus courte?

Exemple



- Graphe pondéré? *oui*
- Poids de $D - M - H - C$? $10 + 5 + 3 = 18$
- Chaîne $D \rightarrow C$ plus courte? $D - G - H - C$ (poids 16)

Algorithme de Dijkstra

Trouver les plus courts chemins entre un sommet A et tous les autres sommets.

Algorithme de Dijkstra

Trouver les plus courts chemins entre un sommet A et tous les autres sommets.

Idée : Déduire, successivement, la distance min entre A et un nouveau sommet.

Algorithme de Dijkstra

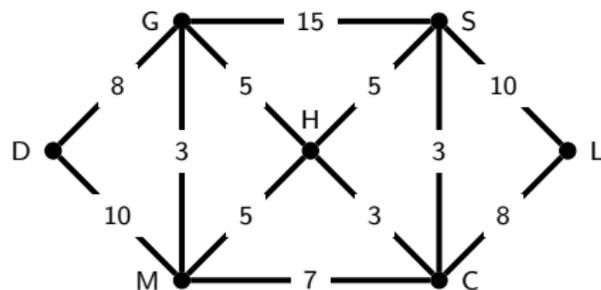
Trouver les plus courts chemins entre un sommet A et tous les autres sommets.

Idée : Déduire, successivement, la distance min entre A et un nouveau sommet.

Algorithme de Dijkstra :

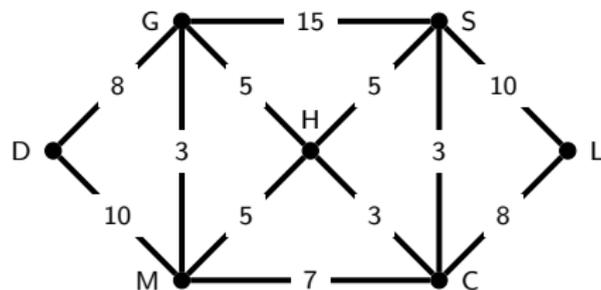
- 1 On part de A marqué.
- 2 Tant qu'il en existe, on choisit un sommet **non marqué** V à plus courte distance de A , puis :
 - On marque V .
 - On met à jour la table des distances aux sommets non marqués, en simulant un passage par V .

Exemple



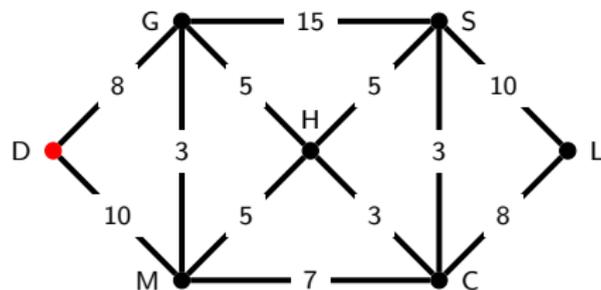
D	G	M	H	C	S	L	Marqué

Exemple



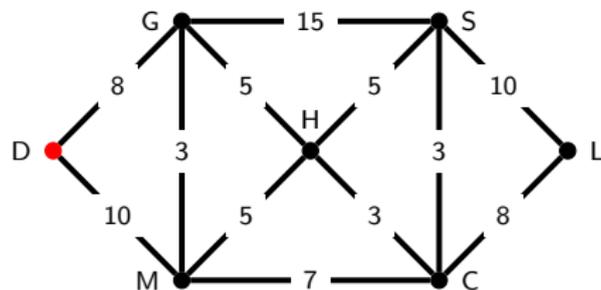
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)

Exemple



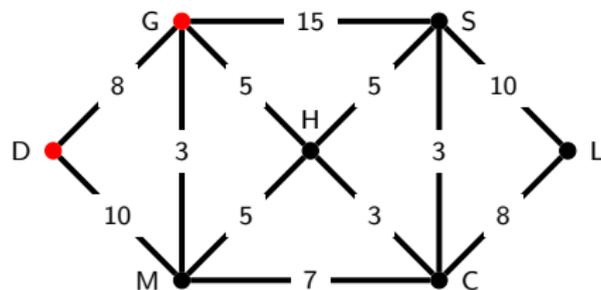
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)

Exemple



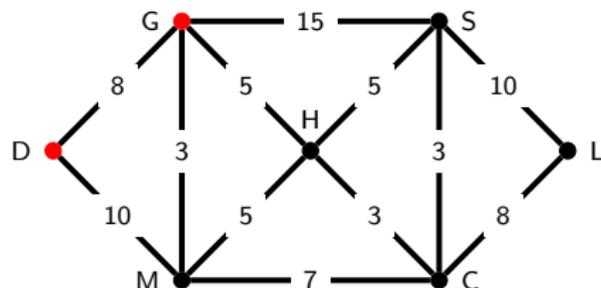
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$

Exemple



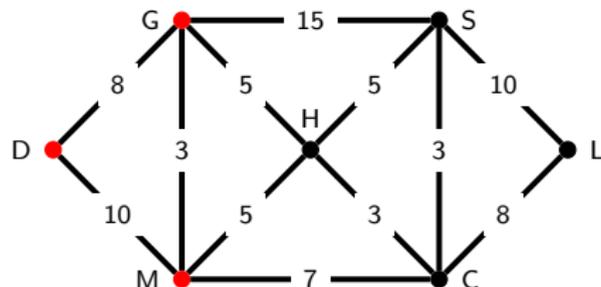
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$

Exemple



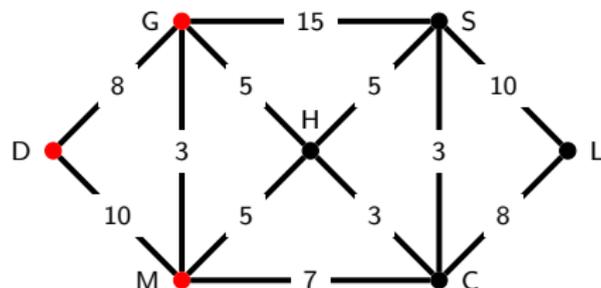
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$

Exemple



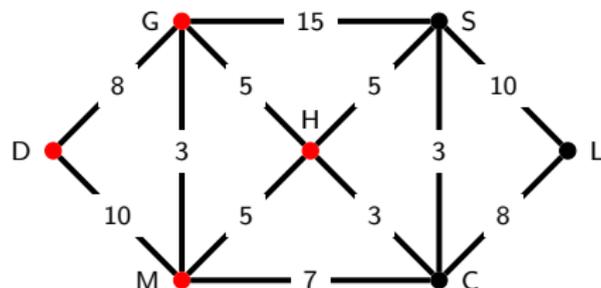
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$

Exemple



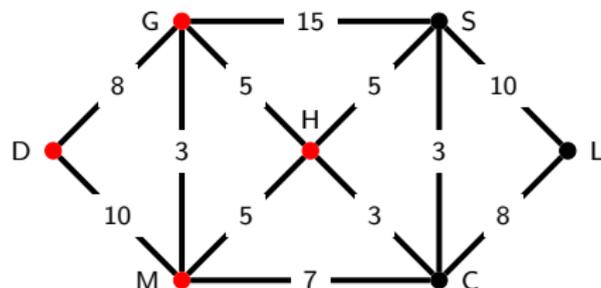
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$
			13_G	17_M	23_G	$+\infty$	$H_G(13)$

Exemple



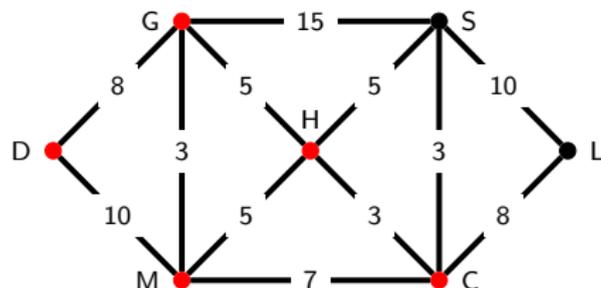
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$
			13_G	17_M	23_G	$+\infty$	$H_G(13)$

Exemple



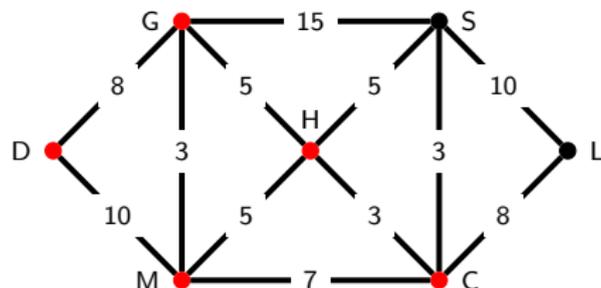
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$
			13_G	17_M	23_G	$+\infty$	$H_G(13)$
				16_H	18_H	$+\infty$	$C_H(16)$

Exemple



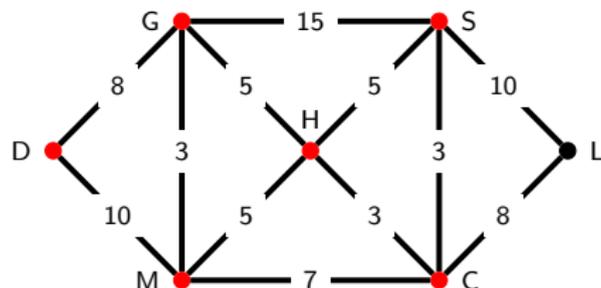
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$
			13_G	17_M	23_G	$+\infty$	$H_G(13)$
				16_H	18_H	$+\infty$	$C_H(16)$

Exemple



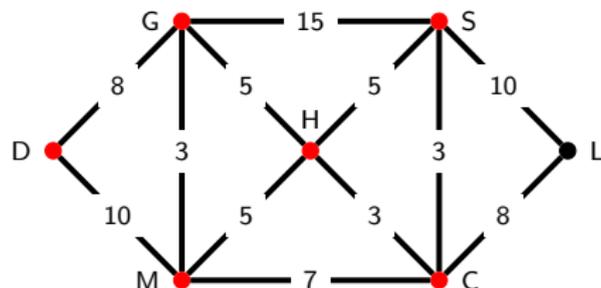
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$
			13_G	17_M	23_G	$+\infty$	$H_G(13)$
				16_H	18_H	$+\infty$	$C_H(16)$
					18_H	24_C	$S_H(18)$

Exemple



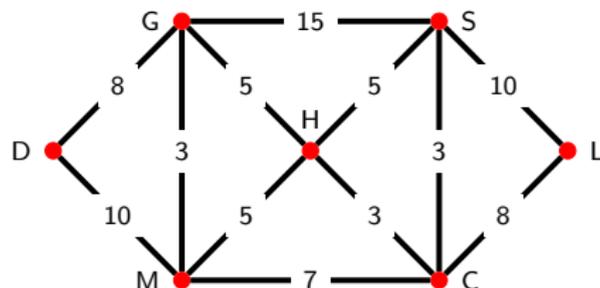
D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$
			13_G	17_M	23_G	$+\infty$	$H_G(13)$
				16_H	18_H	$+\infty$	$C_H(16)$
					18_H	24_C	$S_H(18)$

Exemple



D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$
			13_G	17_M	23_G	$+\infty$	$H_G(13)$
				16_H	18_H	$+\infty$	$C_H(16)$
					18_H	24_C	$S_H(18)$
						24_C	$L_C(24)$

Exemple



D	G	M	H	C	S	L	Marqué
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	D(0)
	8_D	10_D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$G_D(8)$
		10_D	13_G	$+\infty$	23_G	$+\infty$	$M_D(10)$
			13_G	17_M	23_G	$+\infty$	$H_G(13)$
				16_H	18_H	$+\infty$	$C_H(16)$
					18_H	24_C	$S_H(18)$
						24_C	$L_C(24)$

- Le plus petit poids d'une chaîne $D \rightarrow L$ est **24**.

Conclusions de l'application de l'algorithme

- Le plus petit poids d'une chaîne $D \rightarrow L$ est **24**.
- En "retraçant", on trouve que **D – G – H – C – L** est une telle chaîne.