

## Épisode III : Dérivation et étude de fonctions

 Avant de commencer les exercices veuillez lire les fiches [Fiche\\_derivation\\_integration](#), [Fiche\\_resolution\\_equations](#) et [Fiche\\_application\\_derivation](#).

### EXERCICE 1

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer leurs fonctions dérivées.

1.  $f(x) = 3x + 1$  sur  $\mathbb{R}$

2.  $f(x) = 5x^2 - 10x + 4$  sur  $\mathbb{R}$

3.  $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x + 2$  sur  $]0; +\infty[$

4.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  sur  $\mathbb{R}$

5.  $f(x) = 5x^3 + \frac{1}{x} - 4$  sur  $\mathbb{R}^*$

6.  $f(x) = \frac{2x+1}{3} - \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}^*$

7.  $f(x) = 3x^{2/3}$  sur  $\mathbb{R}^*$

8.  $f(x) = x^2 + x^{-3/2} + 4x^{1/2}$  sur  $]0; +\infty[$

9.  $f(x) = \frac{5x^3 - 2x - 1}{3}$  sur  $\mathbb{R}$

10.  $f(x) = (3x + 1)(5x - 7)$  sur  $\mathbb{R}$

11.  $f(x) = (3x + 7)\sqrt{x}$  sur  $]0; +\infty[$

12.  $f(x) = (2x + 3)^{1/3}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

13.  $f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 5}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$

14.  $f(x) = \frac{4}{-5x^2 + 2x + 3}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{5}; 1 \right\}$

### INDICATION

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3.$

2.  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 10x - 10.$

3.  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 4.$

4.  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

5.  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 15x^2 - \frac{1}{x^2}.$

6.  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2}.$

7.  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x^{-1/3}.$

8.  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = 2x - \frac{3}{2}x^{-5/2} + 2x^{-1/2}.$

9.  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{15x^2 - 2}{3}.$

10.  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 30x - 16.$

11.  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x + 7}{2\sqrt{x}}.$

12.  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}, f'(x) = \frac{2}{3}(2x + 3)^{-2/3}.$

13.  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}, f'(x) = \frac{17}{(2x + 5)^2}.$

14.  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{5}; 1 \right\}, f'(x) = \frac{4(10x - 2)}{(-5x^2 + 2x + 3)^2}.$

## EXERCICE 2

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + 5x + 1$$

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
2. Calculer la dérivée de  $f$ .
3. Donner, dans un tableau, le signe de  $f'(x)$  en fonction de  $x$ .
4. Donner, dans le même tableau, les variations de  $f$ .

## EXERCICE 3

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{2x + 1}{3x - 1}$ .

## EXERCICE 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$$

1. Calculer la dérivée de  $f$ .
2. Donner, dans un tableau, le signe de  $f'(x)$  en fonction de  $x$ .
3. Donner, dans le même tableau, les variations de  $f$ .

## EXERCICE 5

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = -x^2 + 5x + 2$ .

## EXERCICE 6

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
2. Calculer et simplifier la dérivée de  $f$ .
3. Donner, dans un tableau, le signe de  $f'(x)$  en fonction de  $x$ .
4. Donner, dans le même tableau, les variations de  $f$ .

## EXERCICE 7

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = \frac{3}{x^2 + 4x} - 1$$

## EXERCICE 8

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 5$$

1. Calculer la dérivée de  $f$ .
2. Donner, dans un tableau, le signe de  $f'(x)$  en fonction de  $x$ .
3. Donner, dans le même tableau, les variations de  $f$ .
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.
5. Tracer  $T$ . Donner l'allure de  $\mathcal{C}_f$ .

### EXERCICE 9

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$$

### EXERCICE 10

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 5$$

1. Calculer la dérivée de  $f$  puis factoriser  $f'$ .
2. Donner, dans un tableau, le signe de  $f'(x)$  en fonction de  $x$ .
3. Donner, dans le même tableau, les variations de  $f$ .

### EXERCICE 11

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 12x + 3$$

On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère.

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 3x^2 + 7x - 6$ . Étudier le signe de  $g$ .
2. Calculer  $f'(x)$  et vérifier que  $f'(x) = 2g(x)$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
4. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.
5. On pose  $h(x) = f(x) - (8x - 8)$ .
  - (a) Étudier les variations de  $h$ .
  - (b) En déduire le signe de  $h(x)$  en fonction de  $x$ .
  - (c) Étudier les positions relatives de  $\mathcal{C}_f$  et  $T$ .

### EXERCICE 12

Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$$

1. Calculer la dérivée de  $g$  puis factoriser  $g'$ .
2. Donner, dans un tableau, le signe de  $g'(x)$  en fonction de  $x$ .
3. Donner, dans le même tableau, les variations de  $g$ .

### EXERCICE 13

Soit  $h$  la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 3}$$

On appelle  $\mathcal{C}_h$  sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $h$ .
2. Calculer la dérivée de  $h$ .
3. Donner, dans un tableau, le signe de  $h'(x)$  en fonction de  $x$ .
4. Donner, dans le même tableau, les variations de  $h$ .
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_h$  au point d'abscisse 0.
6. Tracer  $T$ . Donner l'allure de  $\mathcal{C}_h$ .

### EXERCICE 14

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère.

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.
3. Étudier les positions relatives de  $\mathcal{C}_f$  et  $T$ .

### EXERCICE 15

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2x - 2}$$

On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa représentation graphique dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ . Interpréter graphiquement le résultat.
3. Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathcal{D}_f$ .
4. Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 2.
5. Tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$  en cohérence avec les questions précédentes.

### EXERCICE 16

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = (x^2 - 5x)\sqrt{x}$$

1. Justifier que  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  puis démontrer que, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$g'(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x}(x - 3)$$

2. En utilisant le taux d'accroissement, démontrer que  $g$  est dérivable en 0.
3. Dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

### EXERCICE 17

Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels fixés.

1. Calculer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x)$  en fonction de  $x$ .
2. On sait que  $f'(0) = 3$ ,  $f'(1) = -1$  et  $f(1) = 6$ . Déterminer  $a, b$  et  $c$  et en déduire  $f(x)$  en fonction de  $x$ .