Droites et systèmes d'équations

Définition

Soit c un réel.

- ✧ Tout droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = c$,
- ✧ L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x = c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarques

- ✧ m s'appelle le coefficient directeur et p est l'ordonnée à l'origine.
- ✧ Une équation de droite peut toujours s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$: c'est ce qu'on appelle l'équation cartésienne de la droite.

Coefficient directeur

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'une droite $\mathscr{D}$, le coefficient directeur se calcule grâce à la formule :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Droites parallèles et droites sécantes

Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont :

- ✧ parallèles si et seulement si $m = m'$,
- ✧ sécantes si et seulement si $m \neq m'$.

Système de deux équations à deux inconnues

Résoudre le système linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right.$$

c'est trouver tous les couples de réels $(x; y)$ appelés solutions du système qui vérifient à la fois les deux équations.

Interprétation graphique

Les équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ définissent, dans un repère, deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Résoudre le systèmes (S) revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

- ✧ Si $ab' - a'b \neq 0$, les droites ne sont pas parallèles et le système admet une solution unique,
- ✧ Si $ab' - a'b = 0$ les droites sont parallèles (strictement ou non) et le système admet aucune solution ou une infinité de solutions.

Définition

Soient m et p deux réels.

- ✧ Tout droite non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $y = mx + p$,
- ✧ L'ensemble des points $M(x; y)$tels que $y = mx + p$ est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemples

- ✧ $5x + y = -2$; $y = -5x - 2$; $m = -5$; $p = -2$.
- ✧ $2x - 3y = 1$; $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$; $m = \frac{2}{3}$; $p = -\frac{1}{3}$.
- ✧ $2x + 3y = 7 - 5x + 3y$; $x = 1$
  Droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Comment déterminer l'équation d'une droite?

On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(2; -1)$ et $B(-1; 5)$.

La droite D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc pour équation $y = mx + p$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 + 1}{-1 - 2} = -2$$

$\mathscr{D}$ passe par le point $A(2; -1)$ d'où :

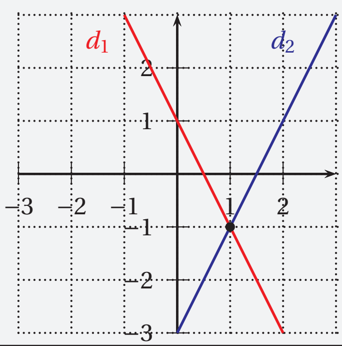
$$y_A = mx_A + p \Rightarrow y_A = -2x_A + p \Rightarrow -1 = -2 \times 2 + p \Rightarrow p = 3$$

la droite $\mathscr{D}$ a pour équation réduite : $\boxed{y = -2x + 3}$.

Exemple

On considère le système

- ✧ $ab' - a'b = 2 \times 1 - (-2) \times 1 = 4 \neq 0$
  les droites sont donc sécantes.
- ✧ on trace $d_1 : y = -2x + 1$ et $d_2 : y = 2x - 3$,
- ✧ on lit le point d'intersection : $\mathscr{S} = \{(1; -1)\}$.



Résolution par le calcul

Résoudre le système $(S) : \left\{ \begin{array}{l} 4x + y = 7 \\ 3x - 2y = 8 \end{array} \right.$ par **substitution**.

$$(S) \Longleftrightarrow (S) : \left\{ \begin{array}{l} y = -4x + 7 \\ 3x - 2(-4x + 7) = 8 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -4 \times 2 + 7 \\ x = \frac{22}{11} = 2 \end{array} \right.$$

D'où : $\boxed{\mathscr{S} = \{(2; -1)\}}$.