

# Coloration acyclique

Hervé Hocquard

Université Bordeaux 1, France

GT

2 Octobre 2009

# Coloration acyclique

Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe.

### k-coloration propre

Une *k-coloration propre* d'un graphe  $G$  est une application  $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de l'ensemble des sommets  $V(G)$  de  $G$  dans l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$  de telle sorte que deux sommets adjacents dans  $G$  reçoivent des couleurs différentes, *i.e.* si  $uv \in E(G)$ ,  $c(u) \neq c(v)$ .

Un graphe qui admet une *k-coloration* est dit *k-coloriable*.

## Coloration acyclique

Une *coloration acyclique* de  $G$  est une coloration propre des sommets de  $G$  telle que le graphe induit par l'union de deux classes de couleurs est une forêt.

## Nombre chromatique acyclique

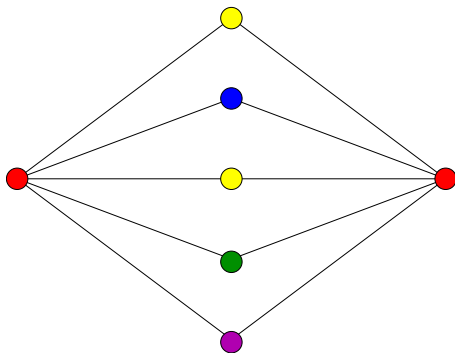
Le *nombre chromatique acyclique* de  $G$ ,  $\chi_a(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  est acycliquement  $k$ -coloriable.



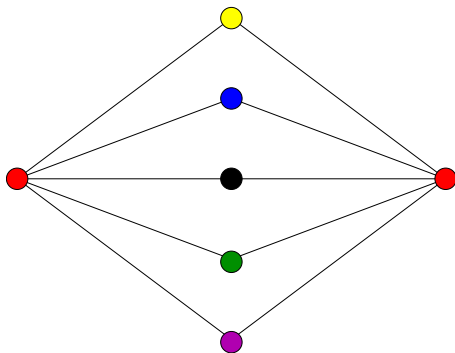
B. Grünbaum.

Acyclic colorings of planar graphs.

*Israel J. Math.*, (14) :390-408, 1973.



La coloration de  $G$  n'est pas acyclique



La coloration de  $G$  est acyclique

# Quelques résultats

## Théorème [Grünbaum '73]

Tout graphe planaire est acycliquement 9-coloriable.



B. Grünbaum.

Acyclic colorings of planar graphs.

*Israel J. Math.*, (14) :390-408, 1973.

# Quelques résultats

## Théorème [Mitchem '74]

Tout graphe planaire est acycliquement 8-coloriable.



Mitchem

Every planar graph has an acyclic 8-coloring.

*Duke Math. J.*, (41) :177-181, 1974.



## Théorème [M.O Albertson and D.M. Berman '77]

Tout graphe planaire est acycliquement 7-coloriable.

## Théorème [A.V. Kostochka '76]

Tout graphe planaire est acycliquement 6-coloriable.



M.O Albertson and D.M. Berman

Every planar graph has an acyclic 7-coloring.

*Israel J. Math.*, (28) :169-174, 1977.



A.V. Kostochka

Acyclic 6-colorings of planar graphs.

*Metody Diskret. Anal.*, (28) :40-56, 1976 (in Russian).

## Théorème [O.V. Borodin '79]

Tout graphe planaire est acycliquement 5-coloriable.

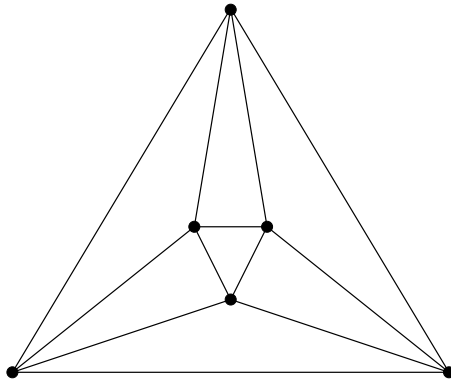


O.V. Borodin

On acyclic colorings of planar graphs.

*Discrete Math.*, (25) :211-236, 1979.

Cette borne est la meilleure possible puisqu'il existe des graphes planaires 4-réguliers non acycliquement 4-coloriables.



**G n'est pas acycliquement 4-coloriable**

# Les graphes planaires de maille donnée

## Théorème [Borodin, Kostochka, Woodall '99]

Tout graphe planaire de maille au moins 7 (resp. 5) est acycliquement 3-coloriable (resp. 4-coloriable).



O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall  
Acyclic colourings of planar graphs with large girth.  
*J. London Math. Soc.*, 2(60) :344-352, 1999.

# Les graphes planaires de degré maximum borné

## Théorème [Folklore]

Tout graphe de degré maximum au plus 3 est acycliquement 4-coloriable.

## Théorème [M.I. Burstein '79]

Tout graphe de degré maximum au plus 4 est acycliquement 5-coloriable.



M.I. Burstein

Every 4-valent graph has an acyclic 5-coloring.

*Soobšč. Akad. Nauk Gruzin SSR, (93) :21-24, 1979 (in Russian).*

# Les graphes planaires de degré maximum borné

## Théorème [G. Fertin, A. Raspaud '05]

Tout graphe de degré maximum au plus  $\Delta$  ( $\Delta \geq 6$ ) est acycliquement  $\left(\frac{\Delta(\Delta-1)}{2}\right)$ -coloriable si  $\Delta$  est pair et  $\left(\frac{\Delta(\Delta-1)}{2} - 1\right)$ -coloriable si  $\Delta$  est impair.



G. Fertin, A. Raspaud

Acyclic coloring of graphs of maximum degree  $\Delta$ .

*DMTCS proc. AE, 389-396, 2005.*

# Les graphes planaires de degré maximum borné

## Théorème [G. Fertin, A. Raspaud '05]

Tout graphe de degré maximum au plus 5 est acycliquement 9-coloriable.



G. Fertin, A. Raspaud

Acyclic coloring of graphs of maximum degree five : nine colors are enough.

*Inform. Process. Lett.*, (105) :65-72, 2008.

# Les graphes planaires de degré maximum borné

## Théorème

Tout graphe de degré maximum au plus 5 est acycliquement 8-coloriable.

## Conjecture

Tout graphe de degré maximum au plus 6 est acycliquement 11-coloriable.



# Les graphes planaires de degré maximum borné

**Théorème [N. Alon, C. McDiarmid, B. Reed '91]**

Tout graphe de degré maximum  $\Delta$  admet une coloration acyclique utilisant  $50\Delta^{4/3}$  couleurs lorsque  $\Delta \rightarrow \infty$ .



N. Alon, C. McDiarmid, B. Reed

Acyclic coloring of graphs.

*Random structures and algorithms*, 2(3) :277-288, 1991.

# Coloration par listes

## Assignation de listes

Une *assignation de listes* de  $G$  est une fonction  $L$  qui associe à chaque sommet  $v \in V(G)$  une liste  $L(v)$  de couleurs valides.



P. Erdős, A. Rubin, and H. Taylor.

Choosability in graphs.

*Congr. Numer.*, 26 :125â157, 1979.



V. Vizing.

Coloring the vertices of a graph in prescribed colors .

*Metody Diskret. Anal.*, (19) :3-10, 1976.

## $L$ -coloration par listes

Un graphe  $G$  est  *$L$ -coloriable* si pour l'assignation de listes de couleurs  $L = \{L(v) : v \in V(G)\}$ , il existe une coloration propre  $c$  des sommets de  $G$  telle que  $c(v)$  appartient à  $L(v)$  pour tout  $v$  de  $V(G)$ .

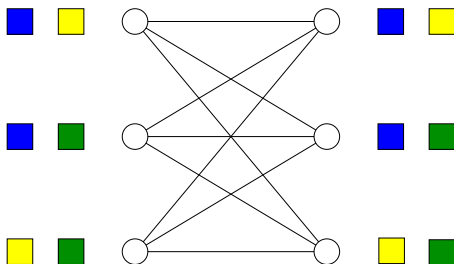
## $k$ -liste coloration

Si  $G$  est  $L$ -coloriable pour toute assignation de listes  $L$  qui vérifie  $|L(v)| \geq k$  pour tout  $v \in V(G)$ , alors  $G$  est dit  *$k$ -liste coloriable*.

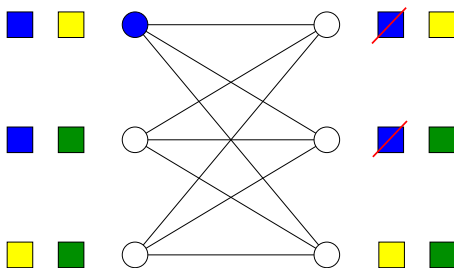
# Question

Coloration et coloration par listes est-ce différent ?

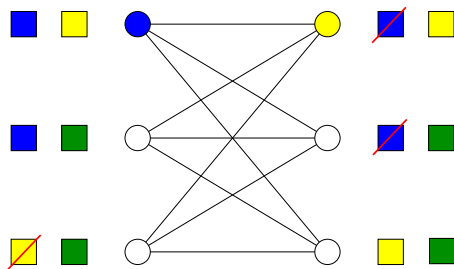
# Exemple



# Exemple

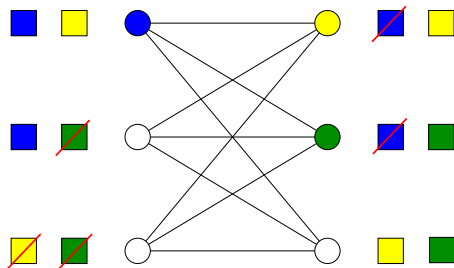


# Exemple

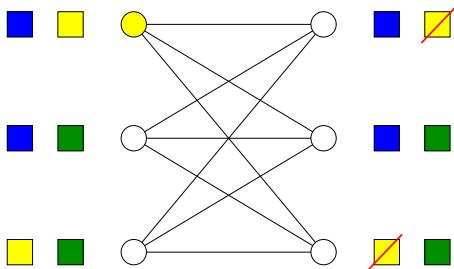




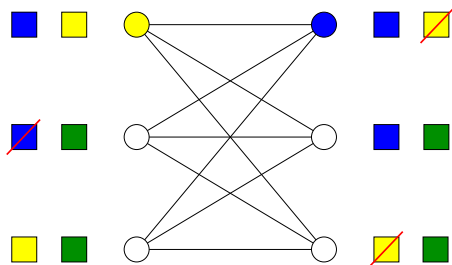
# Exemple



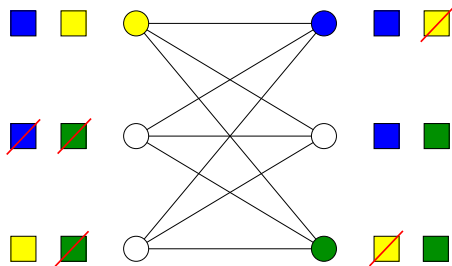
# Exemple



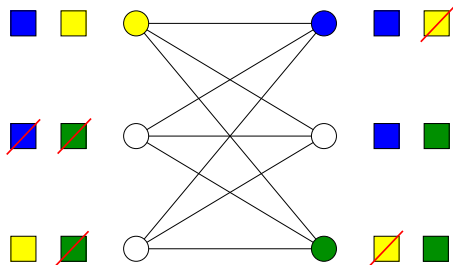
# Exemple



# Exemple



# Exemple



Graphe 2-coloriable mais non 2-liste coloriable

## Théorème [Thomassen '94]

Tout graphe planaire est 5-liste coloriable.



C. Thomassen

Every planar graph is 5-choosable.

*J. Combin. Theory Ser. B*, 62 :180-181, 1994.

# Coloration acyclique par listes

## $L$ -coloration acyclique par listes

Un graphe  $G$  est *acycliquement  $L$ -coloriable* si pour l'assignation de listes de couleurs aux sommets de  $G$ , il existe une coloration acyclique  $c$  des sommets de  $G$  telle que  $c(v) \in L(v)$  pour tout  $v$  de  $V(G)$ .

## $k$ -liste coloration acyclique

Si pour toute assignation de listes  $L$  satisfaisant  $\forall v \in V(G)$ ,  $|L(v)| \geq k$ , le graphe  $G$  admet une  $L$ -coloration acyclique, alors  $G$  est dit *acycliquement  $k$ -liste coloriable*.

Le *nombre chromatique acyclique de listes* de  $G$ ,  $\chi_a^l(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  est acycliquement  $k$ -liste coloriable.



Théorème[Borodin, Fon-Der Flaas, Kostochka, Raspaud, Sopena '02]

Tout graphe planaire est acycliquement 7-liste coloriable.

Conjecture[Borodin, Fon-Der Flaas, Kostochka, Raspaud, Sopena '02]

Tout graphe planaire est acycliquement 5-liste coloriable.



O.V. Borodin, D.G. Fon-Der Flaass, A.V. Kostochka, A. Raspaud and É. Sopena

Acyclic list 7-coloring of planar graphs.

*J. Graph Theory*, 40(2) :83-90, 2002.

# Les graphes planaires de degré maximum borné

## Théorème

1. Tout graphe planaire de degré maximum au plus 3 est acycliquement 4-liste coloriable.[D. Gonçalves, M. Montassier '05]
2. Tout graphe planaire de degré maximum au plus 4 est acycliquement 5-liste coloriable.[D. Gonçalves, M. Montassier '05]
3. Tout graphe planaire de degré maximum au plus  $\Delta$  est acycliquement  $50\Delta^{4/3}$ -liste coloriable.[M. Montassier, O. Serra '05]

# Les graphes de degré moyen maximum donné

## Définition

Le degré moyen maximum du graphe  $G$ , noté  $Mad(G)$ , est :

$$Mad(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$$

## Théorème [M.Montassier, P. Ochem, A. Raspaud '05]

1. Tout graphe  $G$  tel que  $Mad(G) < \frac{8}{3}$  est acycliquement 3-liste coloriable.
2. Tout graphe  $G$  tel que  $Mad(G) < \frac{19}{6}$  est acycliquement 4-liste coloriable.
3. Tout graphe  $G$  tel que  $Mad(G) < \frac{24}{7}$  est acycliquement 5-liste coloriable.

# Les graphes planaires de maille donnée

## Lemme

Soit  $G$  un graphe planaire de maille  $g$ , alors :

$$Mad(G) < \frac{2g}{g-2}$$

## Corollaire [M.Montassier, P. Ochem, A. Raspaud '05]

1. Tout graphe planaire de maille au moins 8 est acycliquement 3-liste coloriable.
2. Tout graphe planaire de maille au moins 6 est acycliquement 4-liste coloriable.
3. Tout graphe planaire de maille au moins 5 est acycliquement 5-liste coloriable.

# Les graphes planaires de maille donnée

## Théorème [M.Montassier '04]

Tout graphe planaire de maille au moins 4 est acycliquement 5-liste coloriable.

## Théorème [O.V. Borodin, Min Chen, A. Raspaud '09]

Tout graphe planaire de maille au moins 7 est acycliquement 3-liste coloriable.

# Les graphes planaires sans cycle de longueurs données

## Théorème

1. Tout graphe planaire sans 4, 5 et 6-cycle est acycliquement 4-liste coloriable.
2. Tout graphe planaire sans 4, 5 et 7-cycle est acycliquement 4-liste coloriable.
3. Tout graphe planaire sans 4, 5-cycle ni triangles intersectants est acycliquement 4-liste coloriable.

## Théorème [Min Chen, A. Raspaud '09]

Tout graphe planaire sans 4, 5 et 8-cycle est acycliquement 4-liste coloriable.

# Les graphes planaires sans cycle de longueurs données

## Théorème [Min Chen, A. Raspaud]

1. Tout graphe planaire sans 4 et 5-cycle est acycliquement 5-liste coloriable.
2. Tout graphe planaire sans 4 et 6-cycle est acycliquement 5-liste coloriable.

## Théorème [Xu, Zhang]

Tout graphe planaire sans 4-cycle ni 6-cycle cordaux est acycliquement 5-liste coloriable.

# Les graphes planaires sans cycle de longueurs donnés

## Théorème [Min Chen, Wang]

1. Tout graphe planaire sans 4-cycle est acycliquement 6-liste coloriable.
2. Tout graphe planaire sans 4-cycle avec  $d_{\Delta}(G) \geq 3$  est acycliquement 5-liste coloriable.



## Conjecture de Steinberg

Tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 et 5 est 3-coloriable.



T.R. Jensen and B. Toft  
Graph coloring problems.  
*Wiley Interscience*, 1995.

## Relaxation d'Erdős

Quel est le plus petit entier  $i$  tel que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à  $i$  est 3-coloriable.

La meilleure borne connue est  $i = 7$ .



O.V. Borodin, A.N. Glebov, A. Raspaud and M.R. Salavatipour

Planar graphs without cycles of length 4 to 7 are 3-colorable.

*J. Combin. Theory, Ser. B* 93 303-311, 2005.

## Que peut-on dire de la coloration par listes ?

### Le cas de la coloration par listes

Quel est le plus petit entier  $i$  tel que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à  $i$  est 3-liste coloriable.

En 2003, Voigt a prouvé que la Conjecture de Steinberg ne pouvait être étendue à la notion de coloration par listes ; d'où,  $i \geq 6$ .



M. Voigt

A non-3-choosable planar graph without cycles of length 4 and 5.

*Discrete Math.*, 307(7-8) :1013-1015, 2006.

# Que peut-on dire de la coloration par listes ?

## Théorème[Borodin '96]

Tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à 9 est 3-coloriable, en fait, 3-liste coloriable.



O.V. Borodin

Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings.

*J. Graph Theory*, 21(2) :183-186, 1996.

## Problème

Quel est le plus petit entier  $i$  tel que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à  $i$  est acycliquement 3-liste coloriable.

# Résultat

## Théorème

Tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à 12 est acycliquement 3-liste coloriable.

# Déroulement de la preuve

Supposons que  $H$  est un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.

1. Propriétés structurelles de  $H$ .
2. Procédure de déchargement.
  - 2.1 Une fonction poids  $\omega$ .
  - 2.2 Règles de déchargement (R1) et (R2). [Redistribution des charges suivant les règles de déchargement établies. Une fois la procédure terminée une nouvelle fonction poids  $\omega^*$  est créée et la charge totale du graphe reste inchangée, *i.e*  $\sum_x \omega(x) = \sum_x \omega^*(x)$ .]
3. En utilisant la formule d'Euler et les propriétés structurelles de  $H$  nous aboutissons à une contradiction,  
 $0 \leq \sum_x \omega^*(x) = \sum_x \omega(x) < 0$ .  
**Donc aucun contre-exemple n'existe.**

## Configurations réductibles

Supposons que  $H$  est un contre-exemple d'ordre minimum au théorème. Soit  $L$  une assignation de listes avec  $|L(v)| = 3$  pour tout  $v \in V(H)$  telle que  $H$  n'admet pas de  $L$ -coloration acyclique.

- (C1)  $H$  ne possède pas de 1-sommet.
- (C2) Une 3-face n'a pas de 2-sommet sur son bord.
- (C3) Un 2-sommet n'est pas adjacent à un 2-sommet.



## Configurations réductibles

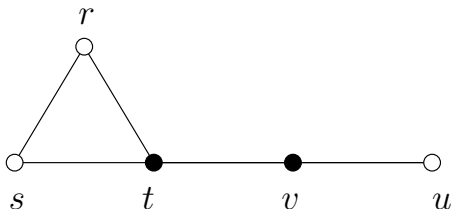
Supposons que  $H$  est un contre-exemple d'ordre minimum au théorème. Soit  $L$  une assignation de listes avec  $|L(v)| = 3$  pour tout  $v \in V(H)$  telle que  $H$  n'admet pas de  $L$ -coloration acyclique.

- (C1)  $H$  ne possède pas de 1-sommet.
- (C2) Une 3-face n'a pas de 2-sommet sur son bord.
- (C3) Un 2-sommet n'est pas adjacent à un 2-sommet.

# Configurations réductibles

## 3\*-sommets

Un 3-sommet est un **3\*-sommets** si il est incident à une 3-face et adjacent à un 2-sommet.



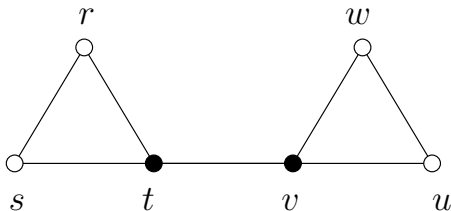
Le sommet  $t$  est un 3\*-sommets

(C4) Une 3-face a au plus un 3\*-sommets sur son bord.

# Configurations réductibles

## 3\*-face et face liée

1. Une 3-face  $rst$  telle que  $d(r) = d(s) = d(t) = 3$  qui a un 3\*-sommet sur son bord est appelée une **3\*-face**.
2. **Deux 3-faces  $rst$  et  $uvw$  sont dites liées** s'il existe une arête  $tv$  qui relie ces deux 3-faces de telle sorte que  $d(t) = d(v) = 3$ .

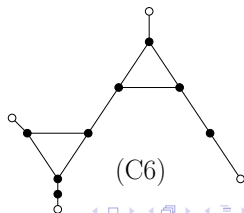
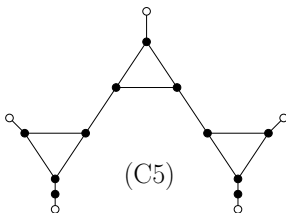
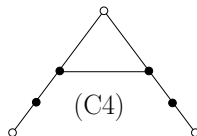
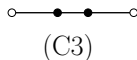
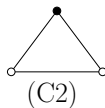
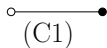


Les deux 3-faces  $[rst]$  et  $[uvw]$  sont liées

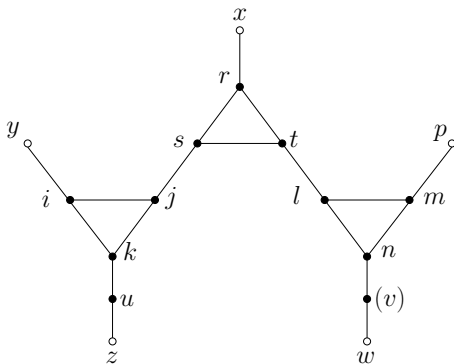
## Configurations réductibles

- (C5) Une 3-face  $rst$  avec  $d(r) = d(s) = d(t) = 3$  est liée à au plus une  $3^*$ -face.
- (C6) Deux  $3^*$ -faces ne peuvent être liées.

# Ensemble des configurations réductibles

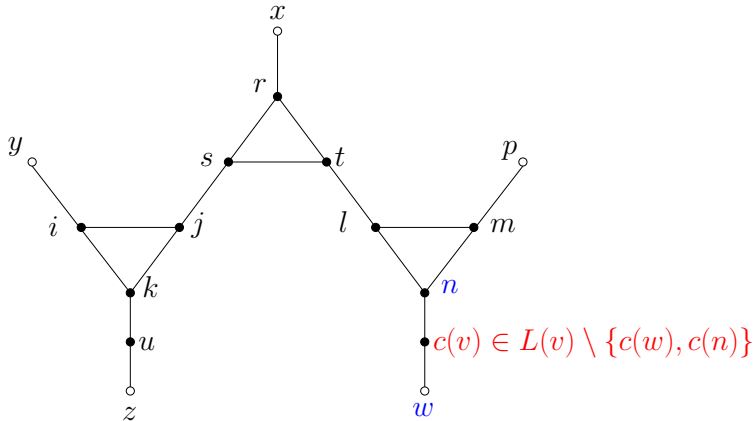


# Preuve de la configuration réductible (C5)

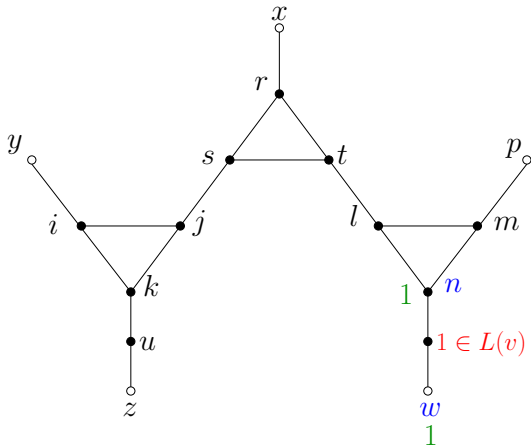


Par minimalité de  $H$ ,  $H' = H \setminus \{v\}$  est acycliquement 3-liste coloriable. Il existe donc une  $L$ -coloration acyclique  $c$  de  $H'$ .

# Premier cas : $c(w) \neq c(n)$

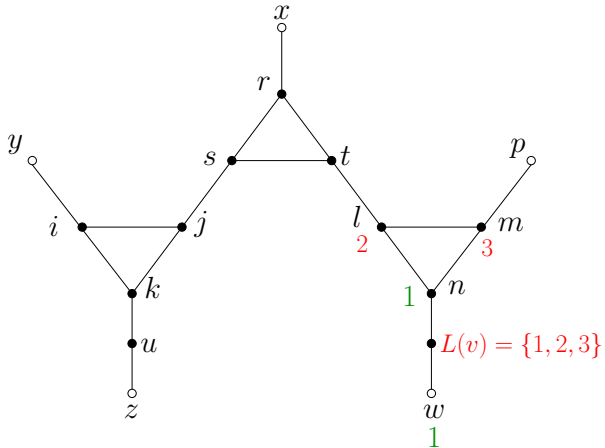


# Second cas : $c(w) = c(n)$

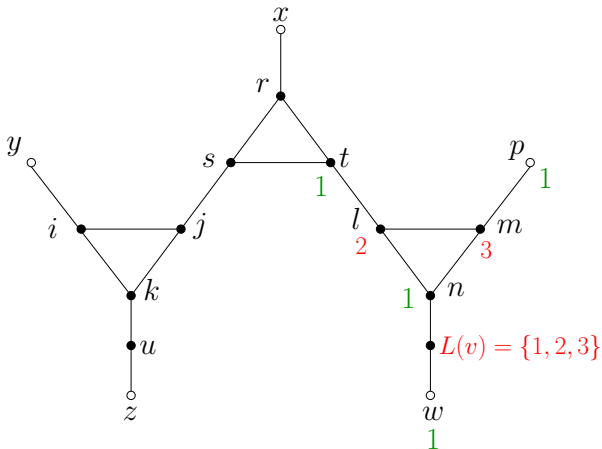




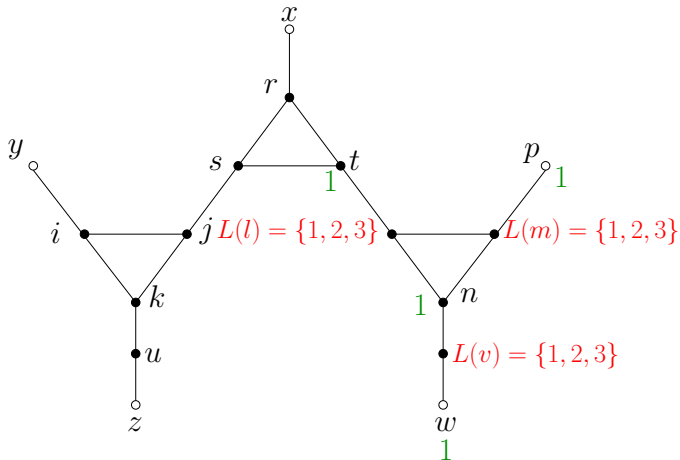
# Second cas : $c(w) = c(n)$



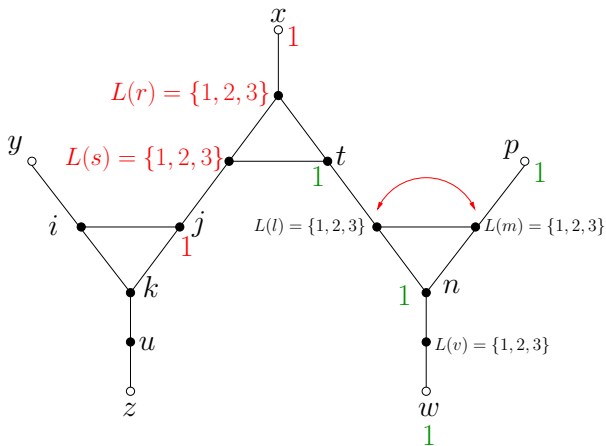
# Second cas : $c(w) = c(n)$



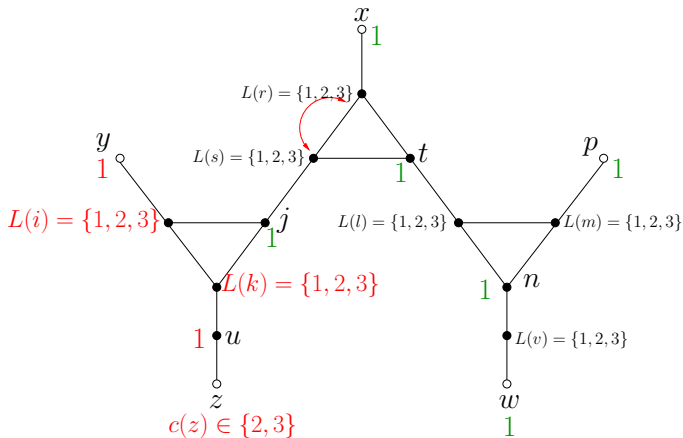
# Second cas : $c(w) = c(n)$



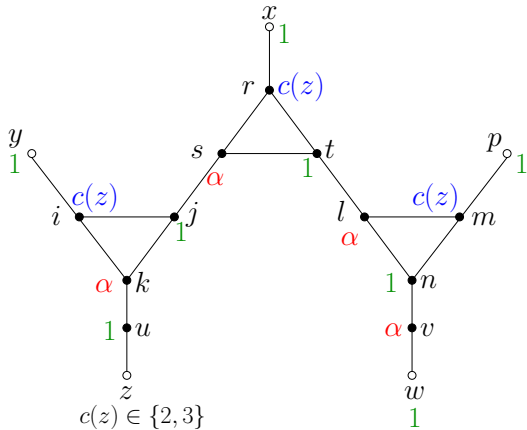
# Second cas : $c(w) = c(n)$



# Second cas : $c(w) = c(n)$



## Second cas : $c(w) = c(n)$



$$\alpha = \{2, 3\} \setminus \{c(z)\}$$

## Charge initiale

$$\omega(x) = 2r(x) - 26 \text{ si } x \in F(H)$$

En utilisant  $\sum_{f \in F(H)} r(f) = \sum_{v \in V(H)} d(v) = 2|E|$

On obtient,  $\sum_{f \in F(H)} (2r(f) - 26) = 4|E| - 26|F|$

Par la formule d'Euler nous avons :

$$|V| - |E| + |F| = 2 \times (-26)$$

$$26|E| - 26|V| - 26|F| = -52$$

$$22|E| - 26|V| + 4|E| - 26|F| = -52$$

## Charge initiale

$$\sum_{v \in V(H)} (11d(v) - 26) + \sum_{f \in F(H)} (2r(f) - 26) = -52$$

$$\sum_{v \in V(H)} \omega(v) + \sum_{f \in F(H)} \omega(f) = -52$$

$$\sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) < 0$$

Conclusion :

$$\omega(x) = 11d(x) - 26 \text{ si } x \in V(H)$$

$$\omega(x) = 2r(x) - 26 \text{ si } x \in F(H)$$



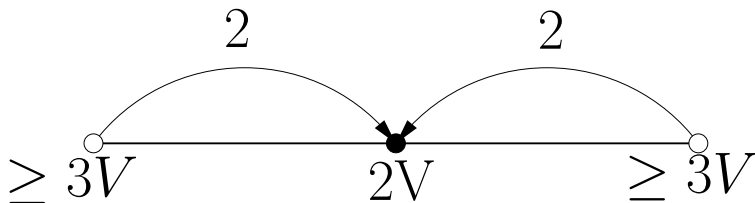
## Observons la situation...

$$\omega(3f) = -20 \quad , \quad \omega(\geq 13f) \geq 0$$

$$\omega(2V) = -4 \quad , \quad \omega(3V) = 7 \quad , \quad \omega(4V) = 18$$

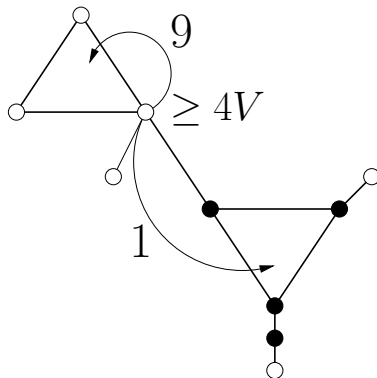
Soient les règles de déchargement suivantes :

## Règles de déchargement



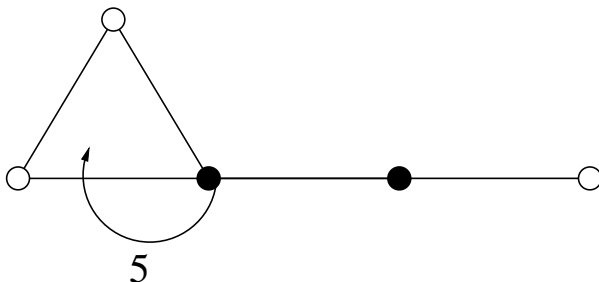
(R1.1) Chaque  $\geq 3$ -sommet  $v$  donne  $2$  à chaque  $2$ -sommet adjacent.

# Règles de déchargement



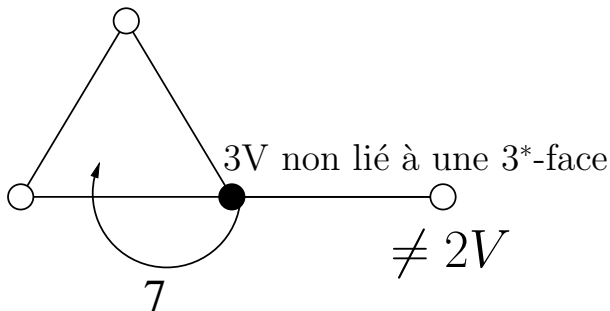
(R1.2) Chaque  $\geq 4$ -sommet  $v$  donne 9 à chaque 3-face incidente et 1 à chaque 3\*-face liée.

# Règles de déchargement



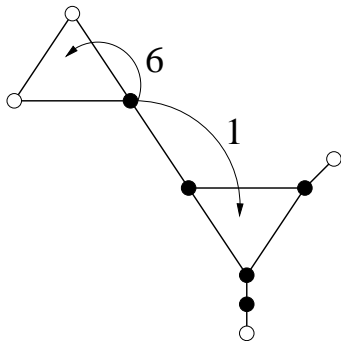
(R2.1) Chaque 3\*-sommet  $v$  donne 5 à sa 3-face incidente.

## Règles de déchargement



(R2.2) Chaque 3-sommet  $v$ , différent d'un  $3^*$ -sommet, qui n'est pas lié à une  $3^*$ -face, donne 7 à la 3-face incidente si elle existe.

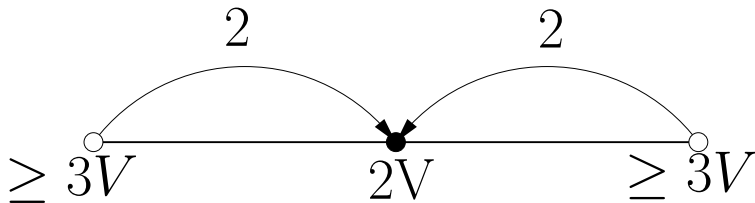
# Règles de déchargement



(R2.3) Chaque 3-sommet  $v$ , différent d'un 3\*-sommet, qui est lié à une 3\*-face, donne 1 à chaque 3\*-face liée et 6 à la 3-face incidente si elle existe.

## Bilan des charges sur les sommets

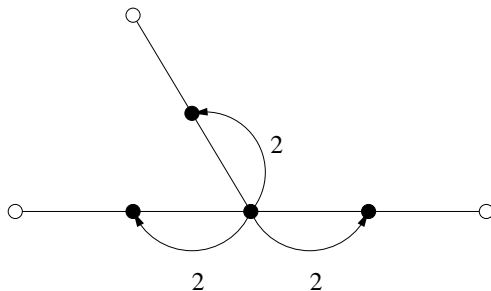
Soit  $v$  un  $k$ -sommet alors  $k \geq 2$  d'après (C1).



Si  $k = 2$ , alors  $\omega(v) = -4$  et  $v$  est adjacent à deux  $\geq 3$ -sommets par (C3). Par (R1.1),  $\omega^*(v) = -4 + 2 \cdot 2 = 0$ .

## Bilan des charges sur les sommets

Si  $k = 3$ , alors  $\omega(v) = 7$ . Puisque  $H$  ne contient pas de 4-cycles,  $v$  est incident à au plus une 3-face.



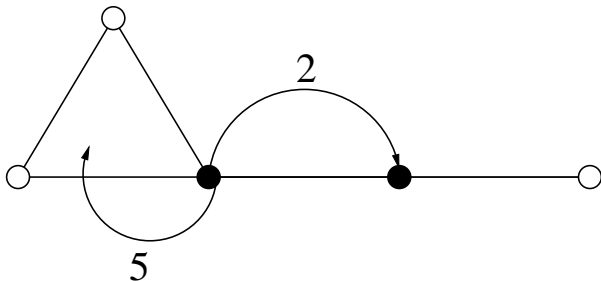
Supposons que  $v$  n'est pas incident à une 3-face. Alors par (R1.1) et (R2.3),  $v$  donne au plus 3 fois 2.

D'où,  $\omega^*(v) \geq 7 - 3 \cdot 2 \geq 1$ .



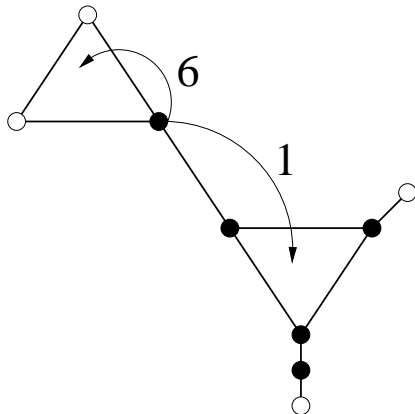
## Bilan des charges sur les sommets

Supposons que  $v$  est incident à une 3-face.



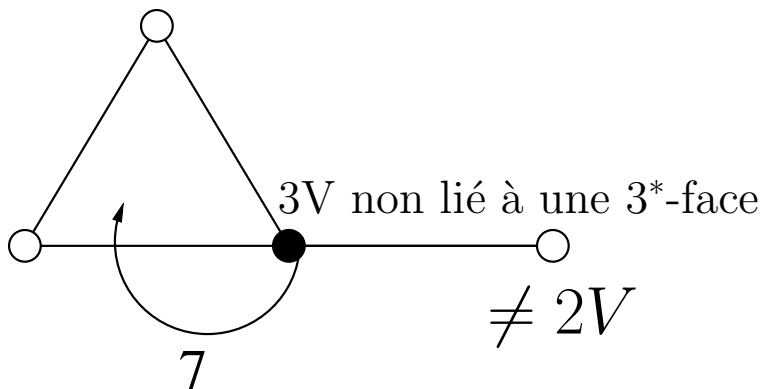
Si  $v$  est un  $3^*$ -sommet, alors  $\omega^*(v) = 7 - 5 - 2 = 0$  par (R1.1) et (R2.1).

## Bilan des charges sur les sommets



Si  $v$  est lié à une  $3^*$ -face alors  $\omega^*(v) \geq 7 - 6 - 1 = 0$  par (R2.3).

## Bilan des charges sur les sommets



Si  $v$  n'est pas adjacent à un 2-sommet et non lié à une  $3^*$ -face  
 alors  $\omega^*(v) = 7 - 7 = 0$  par (R2.2).

## Bilan des charges sur les sommets

Notons  $n_2(v)$  le nombre de 2-sommets adjacents à  $v$ ,  $m_3(v)$  le nombre de 3-faces incidentes à  $v$  et  $n^*(v)$  le nombre de 3\*-faces liées à  $v$ . Si  $k \geq 4$ , alors  $\omega(v) = 11k - 26$ . Par (C1), (C2) et par les définitions de  $n^*(v)$  et des sommets liés, on peut remarquer que :

$$m_3(v) \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad k - 2m_3(v) \geq n_2(v) + n^*(v)$$

# Bilan des charges sur les sommets

$$k \geq 2m_3(v) + n_2(v) + n^*(v) \quad (1)$$

Par (R1.1), (R1.2) et l'équation (1) on en déduit que :

$$\begin{aligned} \omega^*(v) &= 11k - 26 - 9m_3(v) - n^*(v) - 2n_2(v) \\ &\geq 11k - 26 - 9m_3(v) - \frac{9}{2}n^*(v) - \frac{9}{2}n_2(v) \\ &\geq 11k - 26 - \frac{9}{2}k \\ &\geq \frac{13}{2}k - 26 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

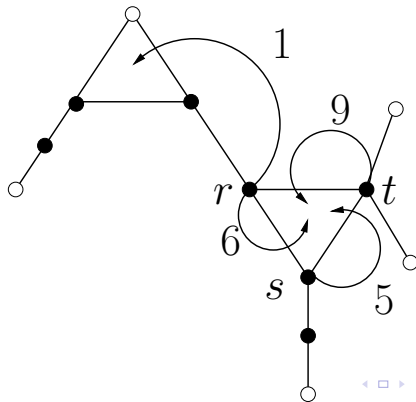
## Bilan des charges sur les faces

Soit  $f$  une  $k$ -face. Alors,  $k = 3$  ou  $k \geq 13$  par hypothèse.

1. Si  $k \geq 13$ , alors  $\omega^*(f) = \omega(f) = 2k - 26 \geq 0$ .
2. Si  $k = 3$ , alors  $\omega(f) = -20$ . Supposons que  $f = [rst]$ . Par (C2),  $f$  n'est pas incidente à un 2-sommet ; d'où,  $d(r) \geq 3, d(s) \geq 3, d(t) \geq 3$ . Par (C4)  $f$  est incidente à au plus un 3\*-sommet.

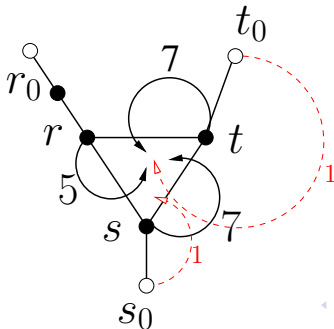
## Bilan des charges sur les faces

On peut remarquer que si l'un des sommets  $r, s, t$  est un  $\geq 4$ -sommets, alors par (R1.2) (R2.1) (R2.2) (R2.3)  
 $\omega^*(f) \geq -20 + 9 + 5 + 6 = 0$ .



## Bilan des charges sur les faces

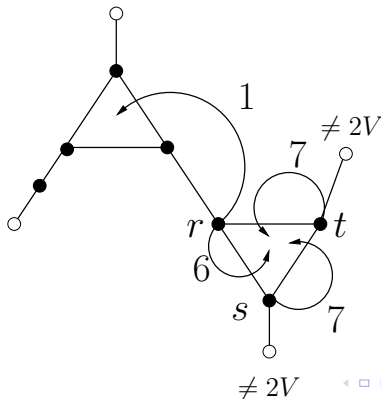
Supposons alors que  $d(r) = d(s) = d(t) = 3$  et soient  $r_0, s_0, t_0$  les autres voisins de  $r, s, t$ , respectivement. Supposons que  $f$  est une  $3^*$ -face et soit  $r$  l'unique  $3^*$ -sommet. Par (C6) ni  $s$  ni  $t$  ne peut être lié à une  $3^*$ -face. De plus,  $s_0$  et  $t_0$  donnent 1 à  $f$  par (R1.2) et (R2.3). D'où  $\omega^*(f) = -20 + 5 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 1$ .





## Bilan des charges sur les faces

Supposons enfin que  $f$  n'est pas une  $3^*$ -face. Par (C5) au plus un sommet parmi  $r, s, t$  est lié à une  $3^*$ -face. Donc  $\omega^*(f) \geq -20 + 6 + 2 \cdot 7 = 0$ , par (R1.2), (R2.2) et (R2.3).



# Etape finale

Lorsque la procédure de déchargement est terminée, nous avons montré que :

- 1 La somme totale des poids est inchangée.
- 2 Pour tout  $x \in V(H) \cup F(H)$ ,  $\omega^*(x) \geq 0$ .

D'où,

$$0 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) = -52 < 0$$

donc aucun contre-exemple ne peut exister.

## Problème

Etant donné  $i \geq 6$ , existe-t-il une constante  $d$  telle que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à  $i$  avec  $d_{\Delta}(G) \geq d$  est acycliquement 3-liste coloriable, où  $d_{\Delta}(G)$  désigne la plus petite distance entre deux triangles de  $G$ . Pour  $i$  donné, si  $d$  existe, quelle est la plus petite valeur de  $d$  ?

# Résultat

## Théorème

Soit  $G$  un graphe planaire. Si  $G$  satisfait une des conditions suivantes :

1.  $G$  ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 10, et  $d_{\Delta}(G) \geq 2$
  2.  $G$  ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 9, et  $d_{\Delta}(G) \geq 3$
  3.  $G$  ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 8, et  $d_{\Delta}(G) \geq 5$
  4.  $G$  ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 7, et  $d_{\Delta}(G) \geq 7$
- alors  $G$  est acycliquement 3-liste coloriable.

# Problèmes

1. Prouver que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à  $i$  est acycliquement 3-liste coloriable pour  $6 \leq i \leq 11$ .
2. Prouver que tout graphe planaire de maille au moins 6 est acycliquement 3-liste coloriable.
3. Déterminer s'il existe une valeur de  $d$  pour laquelle tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à 6 et  $d_{\Delta}(G) \geq d$  est acycliquement 3-liste coloriable.