

## Épisode II : Espaces vectoriels et applications linéaires

### EXERCICE 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $V$  une partie de  $E$ . Vérifier que si  $0_E \notin V$ , alors  $V$  n'est pas un sev de  $E$ .

### EXERCICE 2

On donne ci-dessous des exemples d'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$  ainsi que des vecteurs  $v, v_1, v_2, \dots, v_n$  de  $E$ . Dire à chaque fois s'il est possible d'écrire  $v$  comme combinaison linéaire des  $v_i$ .

- $E = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $v = (-6, -17, 17)$ ,  $v_1 = (2, 1, 3)$ ,  $v_2 = (3, 5, -2)$ .
- $E = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $v = (4, -1, 1)$ ,  $v_1 = (0, 1, 1)$ ,  $v_2 = (2, 0, -1)$ ,  $v_3 = (2, 1, 1)$ .
- $E = \mathbb{C}^2$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $v = (1 + 2i, 3 - 4i)$ ,  $v_1 = (i, 0)$ ,  $v_2 = (0, i)$ .
- $E = \mathbb{C}^2$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $v = (1 + 2i, 3 - 4i)$ ,  $v_1 = (i, 0)$ ,  $v_2 = (0, i)$ .

### EXERCICE 3

Montrer que les sous ensembles suivants sont des sev de  $\mathbb{R}^3$  (on utilisera deux méthodes pour  $A$  et  $B$ ) :

- $A = \{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$ .
- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$ .
- $C = \{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$ .

### EXERCICE 4

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- $D = \{(x + y, x - y, 2y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 0\}$
- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 1\}$
- $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$  (discuter suivant les valeurs du réel  $a$ )

### EXERCICE 5

Les familles suivantes sont-elles libres dans  $\mathbb{R}^3$  ?

- $(u, v)$  avec  $u = (1, 2, 3)$  et  $v = (-1, 4, 6)$ .
- $(u, v, w)$  avec  $u = (1, 2, -1)$ ,  $v = (1, 0, 1)$  et  $w = (-1, 2, -3)$ .
- $(u, v, w, z)$  avec  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (5, 6, 7)$ ,  $w = (9, 10, 11)$  et  $z = (13, 14, 15)$ .

### EXERCICE 6

On considère dans  $\mathbb{R}^3$  les vecteurs  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (4, 1, 4)$  et  $v_3 = (2, -1, 4)$ .

- Montrer que la famille  $(v_1, v_2)$  est libre. Faire de même pour  $(v_1, v_3)$ , puis pour  $(v_2, v_3)$ .
- La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est-elle libre ?

### EXERCICE 7

Les systèmes suivants forment-ils des bases de  $\mathbb{R}^3$  ?

$$S_1 = \{(1, -1, 0), (2, -1, 2)\}.$$

$$S_2 = \{(1, -1, 0), (2, -1, 2), (1, 0, a)\} \text{ avec } a \text{ réel (on discutera suivant la valeur de } a).$$

$$S_3 = \{(1, 1, 3), (3, 4, 5), (-2, 5, 7), (8, -1, 9)\}.$$

### EXERCICE 8

Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  suivants :

$$1. E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$$

$$2. E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$$

$$3. E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$$

### EXERCICE 9

Montrer que les vecteurs  $u_1 = (0, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$  et  $u_3 = (1, 1, 0)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur  $u = (1, 1, 1)$ .

### EXERCICE 10

Soient  $V_1 = Vect \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$ ,  $V_2 = Vect \{(0, 3, 6), (0, 9, 12)\}$  et  $V_3 = Vect \{(0, 3, 6), (10, 11, 12)\}$ .

Quelles sont les dimensions de  $V_1, V_2, V_3$  ?  $V_1$  est-il égal à  $V_3$  ?

### EXERCICE 11

Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$1. f(x, y) = (2x - y, 3x + y)$$

$$2. f(x, y, z) = (x - y, y, x + 3y + z + 1)$$

$$3. f(x, y, z) = (x + y + z, x + z)$$

$$4. f(x, y, z) = xyz$$