

Épisode I : Programmation linéaire



EXERCICE 1

Production de vins (G. Finke)

Dans une distillerie américaine on produit trois sortes de vin allemands authentiques : Heidelberg sweet, Heidelberg regular et Deutschland extra dry. Les produits de base, la main d'œuvre et le profit par gallon sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	raisin - type A (boisseau)	raisin - type B (boisseau)	sucré (kg)	main d'œuvre (heures)	profit (€)
Heidelberg sweet	1	1	2	2	10
Heidelberg regular	2	0	1	3	12
Deutschl. extra dry	0	2	0	1	20

La distillerie possède 150 boisseaux de raisin de type A, 150 boisseaux de raisin de type B, 80 kg de sucre et peut fournir 225 heures de travail.

Quelles quantités faut-il produire de ces trois vins pour obtenir un profit maximum ? Formuler comme programme linéaire.



EXERCICE 2

Une entreprise dispose d'un budget publicitaire de 4800 (unités monétaires) pour le lancement de son nouveau produit. Sa campagne publicitaire utilisera à la fois des spots télévisés et des pages dans la presse quotidienne. On pense que chaque minute de télévision va atteindre 100 000 nouveaux spectateurs et chaque page dans un journal va être lue par 80 000 nouveaux lecteurs. Une minute de télévision coûte 800 et une page dans un journal 600. La direction de l'entreprise souhaite diffuser au moins trois minutes de spot et une page dans un journal. Son objectif est de maximiser le nombre total de cibles (spectateurs et lecteurs).

1. Modéliser ce problème en programme linéaire.
2. Représenter l'espace des solutions réalisables.
3. Quelle est la combinaison optimale si le budget est augmenté de 4800 à 6000 ?
4. Quelle est la décision optimale s'il n'y a pas de contrainte de temps de télévision ?



EXERCICE 3

Fabrication d'huile d'olives (J.-F. Hêche)

Une entreprise fabrique trois qualités différentes d'huile d'olive. Les quantités maximales pouvant être vendues chaque mois ainsi que les prix de vente sont donnés dans la table suivante :

Produit	Ventes maximales (en litres)	Prix de vente (en €/litre)
Huile A	3000	4
Huile B	3000	6
Huile C	2000	10

L'entreprise paie 1000€ pour une tonne d'olives. Chaque tonne d'olives fournit soit 300 litres d'huile A soit 200 litres d'huile B (les coûts de ces transformations ne sont pas modélisés). Chaque litre d'huile A peut être raffiné pour produire 6 dl d'huile B et 3 dl d'huile C. Le coût d'un tel raffinage est de 0.5 € par litre. De même, chaque litre d'huile B peut être raffiné pour obtenir 8 dl d'huile C. Le coût de ce raffinage est de 0.3€ par litre.

Formuler un programme linéaire afin d'aider l'entreprise à déterminer un plan de production mensuel maximisant son profit. Préciser clairement les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.

EXERCICE 4

Compagnie aérienne (traduit de Hillier et Lieberman)

Une compagnie aérienne, en pleine expansion, est en train d'organiser son service clientèle et a besoin de savoir le nombre d'employés dont elle aura besoin pour les prochaines années. L'équipe RO doit donc étudier les besoins pour déterminer le nombre minimum de personnel nécessaire afin de satisfaire les demandes des clients. Basé sur l'ordonnancement des vols, un nouveau planning du personnel est préparé pour les différents créneaux horaires de la journée. Les informations nécessaires pour la planification sont données dans le tableau suivant.

Créneaux	Créneaux couverts					Nb min pers
	poste 1	poste 2	poste 3	poste 4	poste 5	
6h-8h	x					48
8h-10h	x	x				79
10h-12h	x	x				65
12h-14h	x	x	x			87
14h-16h		x	x			64
16h-18h			x	x		73
18h-20h			x	x		82
20h-22h				x		43
22h-24h				x	x	52
24h-6h					x	15
Coût/1j,1p	170 €	160 €	175 €	180 €	195 €	

Chaque employé doit travailler 8h par jour et 5 jours par semaine. Les postes autorisés comprennent les créneaux suivants (montré aussi dans le tableau par des croix) :

Poste 1 : 6h à 14h

Poste 2 : 8h à 16h

Poste 3 : 12h à 20h

Poste 4 : 16h à 24h

Poste 5 : 22h à 6h

Pour chaque poste, le coût associé est donné dans la dernière ligne du tableau (Coût/1j,1p : Coût pour une journée, pour une personne). La question est de savoir combien d'employés il faut affecter dans chaque poste, chaque jour, afin de minimiser le coût total du personnel et en respectant le nombre minimum du personnel nécessaire (dernière colonne dans le tableau).

Modéliser ce problème en programme linéaire. Trouver les contraintes redondantes.

EXERCICE 5

Bergamote (J.-F. Hêche)

Une distillerie produit de l'essence de bergamote pour les parfumeurs de la région. La fabrication d'un litre d'essence de bergamote génère 0.4 litres de déchets polluants liquides. La distillerie peut soit faire traiter ces déchets par une station d'épuration avant de les déverser dans la rivière, soit les déverser directement dans la rivière. La station d'épuration traite au plus 8000 litres de déchets par semaine. Le processus d'épuration n'est pas parfait : 20% des déchets traités par la station d'épuration et déversés ensuite dans la rivière sont encore polluants. Pour chaque litre de déchets transitant par la station d'épuration, 5 euros sont facturés à la distillerie. L'état perçoit une taxe de 15 euros par litre de déchets polluants déversé dans la rivière, qu'on ait tenté de les traiter ou non. La loi limite à 2800 le nombre de litres de déchets polluants pouvant être déversés dans la rivière chaque semaine. Le prix de vente d'un litre d'essence de bergamote est de 110 euros et le coût des matières premières pour cette essence est de 20 euros/litre.

La distillerie souhaite maximiser son profit hebdomadaire. En supposant que la distillerie réussit toujours à vendre tout ce qu'elle produit, énoncer ce problème sous la forme d'un programme linéaire.



EXERCICE 6

Résolution graphique (J.-F. Hêche)

Soit le programme linéaire

$$\begin{array}{rclcl}
 \max z & = & 3x & + & 2y \\
 \text{s.c.} & & x & - & y \geq -2 \\
 & & 2x & + & y \leq 8 \\
 & & x & + & y \leq 5 \\
 & & x & & \geq 0 \\
 & & & & y \geq 0
 \end{array}$$

1. Dessiner la région admissible R du problème.
2. Résoudre le problème graphiquement.



EXERCICE 7

Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2 . Le marché est porteur et toute la production de la semaine sera vendue. Chacun des ces produits demande des heures de fabrications sur les machines A, B, et C comme indiqué dans le tableau

	A	B	C
P_1	2h	0h	1h
P_2	3h	1h	0h
Disponibilité totale de chaque machine	18h	3h	5h

Les marges brutes de chaque produit sont respectivement :

- $M_1 = 1000$ euros
- $M_2 = 2000$ euros

1. Donner une formalisation du problème dans l'optique de maximiser le gain obtenu par la vente des deux produits tout en tenant compte des contraintes de fabrication.
2. Fournir une solution graphique.
3. L'entreprise souhaite investir dans l'achat d'une nouvelle machine.
4. Que lui conseillez-vous ?



EXERCICE 8

Simplexe (J.-F. Hêche)

Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{rclcl}
 \max z & = & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 \text{s.c.} & & 2x_1 & + & x_2 \leq 7 \\
 & & x_1 & & \leq 3 \\
 & & x_1 & + & x_2 \leq 5 \\
 & & x_1, & & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Spécifier à chaque itération les variables de base et hors base ainsi que le point extrême visité.



EXERCICE 9

La méthode du simplexe termine avec les équations ci-dessous :

$$\begin{array}{rclclcl}
 z & = & 10 & - & x_1 & & - & 2x_6 \\
 x_4 & = & 3 & - & 2x_1 & - & x_5 & + & x_6 \\
 x_2 & = & 9 & - & x_1 & - & 2x_5 & - & 2x_6 \\
 x_3 & = & 7 & + & x_1 & - & 2x_5 & - & x_6
 \end{array}$$

Indiquer la solution optimale correspondante.

Trouver une deuxième solution de base optimale.

Déterminer une autre solution optimale qui n'est pas une solution de base.

EXERCICE 10

Une coopérative viticole produit des vins rouges de Bordeaux à partir de différents cépages : cabernet franc, cabernet-sauvignon et merlot. Le tableau ci-dessous donne les stocks (en hl) pour chaque cépage, ainsi que les proportions de chaque cépage (en %) et le profit (en €/litre) pour chaque assemblage A et B.

	Cabernet franc	Cabernet-sauvignon	Merlot	Profit
Bordeaux A	30	20	50	7
Bordeaux B	50	10	40	5
Stocks	5 000	1000	4000	

Quelles quantités de vins faut-il produire pour maximiser le profit de la coopérative ?

Modélisez ce problème comme un programme linéaire.

La coopérative doit faire face à un effondrement des prix du vin. Pour aider l'entreprise en difficulté, l'Union Européenne propose de racheter les stocks de la coopérative. Quel est le prix minimal que doit proposer l'UE pour chaque cépage afin que les profits de l'entreprise restent constants ?

Modélisez ce problème comme un programme linéaire.

Donner la solution optimale du problème de production de vins que se pose la coopérative. Remarquer qu'il est ici inutile de faire tourner un Simplexe !

Quelle est la solution optimale au problème de rachat que se pose l'UE ? Comment se simplifie le programme linéaire par rapport à la question précédente ?

EXERCICE 11

On considère le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned} \max z = & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_3 \geq 2 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Écrire son dual.

Écrire le dual du dual. Que remarquez-vous ?

EXERCICE 12

Transport

Voici la formulation d'un petit problème de transport impliquant 3 entrepôts et 2 clients :

$$\min z = 3x_{11} + 2x_{12} + 4x_{21} + x_{22} + 2x_{31} + 3x_{32}$$

$$\begin{aligned} s.c. \quad & x_{11} + x_{12} \leq 60 \\ & x_{21} + x_{22} \leq 50 \\ & x_{31} + x_{32} \leq 50 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 90 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60 \end{aligned}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \geq 0$$

Ce problème a été mis sous forme standard en introduisant des variables d'écart s_1, s_2 et s_3 dans les trois premières contraintes, puis résolu par un logiciel utilisant la méthode du simplexe. Dans la solution optimale, les variables en base à l'optimum sont $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{31}$ et s_1 .

Mettez le problème sous forme standard (comme suggéré ci-dessus).

Utilisez l'information donnée plus haut pour calculer la solution optimale du problème et le coût de transport correspondant (expliquez les étapes du raisonnement).

Formulez le problème dual.

Résolvez le problème dual.

Montrer que la solution obtenue est bien optimale.

Le gestionnaire du troisième entrepôt s'aperçoit qu'il a commis une erreur en évaluant ses stocks : il possède en fait 55 unités en stock. En supposant que la base optimale ne soit pas affectée, quel sera l'effet de cette

EXERCICE 13

LA FABRIQUE DE JOUETS (D'APRÈS OLIVIER BRIANT)

Un fabricant produit actuellement quatre types de jouets : A, B, C et D vendus respectivement à 53, 56, 62, et 82 € pièce. Ces jouets doivent passer dans deux ateliers, dont les capacités maximales en minutes sont de 1700 et 2600. Les temps de fabrication des quatre types de jouets dans le premier atelier sont respectivement de 2, 3, 1, et 3 minutes, et dans le second atelier de 2, 2, 3, et 4 minutes.

Les quatre type de jouets partagent un composant commun livré par un fournisseur. Les approvisionnements du fabricant lui permettent de produire exactement 1000 jouets. Il veut donc savoir quels jouets fabriquer pour maximiser son bénéfice.

Modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire (P) (on fera abstraction du fait que les variables doivent être entières).

Écrire le programme dual du programme linéaire (P).

Pour résoudre son problème, le fabricant a utilisé un logiciel commercial basé sur le simplexe. Ce logiciel a fourni les informations suivantes sur la solution optimale (les xxx . xxxxxx proviennent d'une mauvaise sortie de l'imprimante) :

Objective = 59500.00000

Rows Section

Number	Row	Value	Slack Value	Dual Value
L	c1_____	1700.000000	xxx.xxxxxx	3.666667
L	c2_____	2600.000000	xxx.xxxxxx	12.666667
E	c3_____	1000.000000	xxx.xxxxxx	20.333333

Columns Section

Number	Column	Value	Input Cost	Reduced Cost
C	X1_____	500.000000	53.000000	xxx.xxxxxx
C	X2_____	xxx.xxxxxx	56.000000	-0.666667
C	X3_____	400.000000	62.000000	xxx.xxxxxx
C	X4_____	xxx.xxxxxx	82.000000	xxx.xxxxxx

Expliquer la signification des informations fournies, et donner, si possible, les valeurs qui devraient se trouver à la place des xxx . xxxxxx.

Donner une interprétation économique des valeurs optimales des variables duales.

Très déçu de ne pas produire le jouet B qui lui tenait à coeur, le fabricant aimerait savoir à quel prix minimum il doit le vendre pour être rentable et ainsi l'inclure dans son plan de production optimal.

Pouvez-vous lui répondre au vu des résultats de l'optimisation ?

Jusqu'à quelle valeur peut-il augmenter ou diminuer le prix du jouet A sans que la solution optimale ne change ?

En regardant les informations données par son logiciel, il a déterminé le prix maximum qu'il peut payer chaque minute supplémentaire dans le premier atelier sans diminuer son bénéfice.

Quel est ce prix maximum ? Jusqu'à combien de minutes supplémentaires ce prix reste-t-il valable ?

Il souhaite créer un nouveau type de jouet, E, demandant 9 minutes dans le premier atelier et 10 minutes dans le second.

A quel prix minimum a-t-il intérêt à le vendre s'il veut les incorporer parmi les 1000 jouets produits ?