

# Applications linéaires et matrices

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

4 septembre 2016

# Notion d'application linéaire

## Définition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On dit qu'une application  $\varphi : E \rightarrow F$  est une application  $\mathbb{K}$ -linéaire ou que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $\mathbb{K}$ -ev si :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2 & \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in E & \quad \varphi(\alpha u) = \alpha \varphi(u) \end{aligned}$$

# Notion d'application linéaire

## Définition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On dit qu'une application  $\varphi : E \rightarrow F$  est une application  $\mathbb{K}$ -linéaire ou que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $\mathbb{K}$ -ev si :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2 \quad \varphi(u + v) &= \varphi(u) + \varphi(v) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in E, \quad \varphi(\alpha u) &= \alpha \varphi(u) \end{aligned}$$

## Proposition

Soit  $\varphi : E \rightarrow F$ ,  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev. Alors  $\varphi$  est linéaire ssi :

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v)$$

et on a alors :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \varphi \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(u_i)$$

## Remarques

- ◆ Si  $\varphi$  est linéaire,  $\varphi(0) = 0$ .
- ◆ On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$  (endomorphismes de  $E$ ). Il est facile de voir que  $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, pour tout sev  $E_1$  de  $E$ ,  $\varphi(E_1)$  est un sev de  $F$ . En particulier,  $\varphi(E)$  est un sev de  $F$ , qui s'appelle l'image de  $\varphi$  et qui se note  $Im\varphi$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, pour tout sev  $E_1$  de  $E$ ,  $\varphi(E_1)$  est un sev de  $F$ . En particulier,  $\varphi(E)$  est un sev de  $F$ , qui s'appelle l'image de  $\varphi$  et qui se note  $Im\varphi$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, pour tout sev  $F_1$  de  $F$ ,  $\varphi^{-1}(F_1)$  est un sev de  $E$ . En particulier,  $\varphi^{-1}(\{0\})$  est un sev de  $E$  qui s'appelle le noyau de  $\varphi$  et que l'on note  $\ker \varphi$ .

## Proposition

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

- $\varphi$  surjective  $\iff \text{Im}\varphi = F$
- $\varphi$  injective  $\iff \ker \varphi = \{0\}$

## Proposition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$ .

## Proposition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $\varphi$  est bijective, alors  $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .

## Proposition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $\varphi$  est bijective, alors  $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .

## Vocabulaire

Si  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $\varphi$  est bijective, on dit que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels et que  $E$  et  $F$  sont deux ev isomorphes. Un endomorphisme bijectif de  $E$  s'appelle un automorphisme de  $E$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev,  $E$  de dimension finie  $n$ . Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $u_1, u_2, \dots, u_n$   $n$  vecteurs de  $F$ . Il existe alors une unique application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  telle que, pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$   $\varphi(e_i) = u_i$ . Autrement dit, une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image des vecteurs d'une base de  $E$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev,  $E$  de dimension finie  $n$ . Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $u_1, u_2, \dots, u_n$   $n$  vecteurs de  $F$ . Il existe alors une unique application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  telle que, pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$   $\varphi(e_i) = u_i$ . Autrement dit, une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image des vecteurs d'une base de  $E$ .

## Proposition

Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)\}$  est une famille génératrice de  $Im\varphi$ . On définit le rang de  $\varphi$  par :  $rang\varphi = \dim Im\varphi$ .

## Remarque

$\text{rang} \varphi \leq \dim E$  et, si  $F$  est aussi de dimension finie,  
 $\text{rang} \varphi \leq \dim F$ .

## Remarque

$\text{rang} \varphi \leq \dim E$  et, si  $F$  est aussi de dimension finie,  
 $\text{rang} \varphi \leq \dim F$ .

## Proposition

Soit  $E$  de dimension finie et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\varphi \text{ injective} \iff \text{rang} \varphi = \dim E$$

Si de plus  $F$  est de dimension finie, alors :

$$\varphi \text{ surjective} \iff \text{rang} \varphi = \dim F$$

et donc si  $E$  et  $F$  sont de dimensions finies, alors :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \text{rang} \varphi = \dim E = \dim F$$

## Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Corollaire

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev tous les deux de dimensions finies. Alors  $\varphi$  est bijective ssi il existe une base de  $E$  qui a pour image par  $\varphi$  une base de  $F$ , et alors toute base de  $E$  a pour image par  $\varphi$  une base de  $F$ .

## Proposition

Deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension. En particulier, tout  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

## Proposition

Deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension. En particulier, tout  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie  $n$  et  $\varphi$  linéaire de  $E$  dans  $F$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\varphi$  est bijective
- (ii)  $\varphi$  est surjective
- (iii)  $\varphi$  est injective.

# Quelques notions sur les formes linéaires

On suppose dans toute la suite que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

## Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On appelle forme linéaire sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  se note  $E^*$  et s'appelle le dual de  $E$ .

# Quelques notions sur les formes linéaires

On suppose dans toute la suite que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

## Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On appelle forme linéaire sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  se note  $E^*$  et s'appelle le dual de  $E$ .

## Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ . Le noyau de toute forme linéaire non nulle est un hyperplan de  $E$  (i.e. un sev de  $E$  de dimension  $n - 1$ ). Inversement, tout hyperplan de  $E$  peut être considéré comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.

## Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .  
Alors toute forme linéaire sur  $E$  est de la forme :

$$\begin{aligned}\varphi & : E \rightarrow \mathbb{K} \\ u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i & \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\end{aligned}$$

où les  $a_i$  sont des éléments fixés dans  $\mathbb{K}$ .

## Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$  on définit la forme linéaire  $e_i^*$  par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Alors la famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$ . On l'appelle la base duale de la base  $\mathcal{B}$ . En particulier,  $\dim E^* = n$  et  $E$  et  $E^*$  sont isomorphes.

Dans toute la suite, les  $ev$  sont de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ .

## Définition

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  où  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ - $ev$ ,  $\dim E = n$  et  $\dim F = m$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{C} = (f_j)_{j=1}^m$  une base de  $F$ . On appelle matrice de  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  la matrice  $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$  où  $a_{ij}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\varphi(e_j)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

On obtient cette matrice par :

$$\begin{array}{c} \varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \cdots \quad \varphi(e_n) \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On notera cette matrice par  $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$  ou, s'il n'y a pas ambiguïté sur les bases,  $M(\varphi)$ .

## Proposition

Soit  $M$  la matrice de  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Soit  $u$  un élément quelconque de  $E$  et  $X$  le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors le vecteur colonne des coordonnées de  $\varphi(u)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est  $Y = MX$ .

## Proposition

Soit  $M$  la matrice de  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Soit  $u$  un élément quelconque de  $E$  et  $X$  le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors le vecteur colonne des coordonnées de  $\varphi(u)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est  $Y = MX$ .

## Proposition

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ . Alors l'application

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

$$\varphi \rightarrow \Phi(\varphi) = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

## Remarque

Il faut retenir que si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et si  $\alpha$  est un réel, alors :

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi + \psi) = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi) + M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\psi) \text{ et } M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\alpha\varphi) = \alpha M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$$

Ceci montre aussi que  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension  $mn$ .

## Proposition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Soit  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  une base respectivement de  $E, F, G$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$  et soit  $M = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$  et  $N = M_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(\psi)$ . Alors  $M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(\psi \circ \varphi) = NM$ .

## Proposition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Soit  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  une base respectivement de  $E, F, G$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$  et soit  $M = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$  et  $N = M_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(\psi)$ . Alors  $M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(\psi \circ \varphi) = NM$ .

## Proposition

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et soit  $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$  sa matrice dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $F$ . Alors :

$$\text{rang} \varphi = \text{rang} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$$

En particulier, si  $\dim E = \dim F$ ,  $\varphi$  est bijective ssi  $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$  est régulière et on a :

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi))^{-1}$$

## Introduction

Soit  $E$  un ev sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ . On note  $I_E$  l'application identité de  $E$  dans  $E$ . Elle est linéaire.

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Il est clair que  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(I_E) = I_n$  où  $I_n$  est la matrice identité.

## Introduction

Soit  $E$  un ev sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ . On note  $I_E$  l'application identité de  $E$  dans  $E$ . Elle est linéaire.

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Il est clair que  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(I_E) = I_n$  où  $I_n$  est la matrice identité. Soit maintenant une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$ . La matrice de  $I_E$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$  est obtenue en écrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$  et  $\mathcal{B}' = (e'_i)_{i=1}^n$ , on a la matrice :

## Introduction

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(I_E) = \begin{matrix} & e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\ e_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ e_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

## Introduction

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(I_E) = \begin{matrix} & e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\ e_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ e_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Si  $u$  est un élément fixé de  $E$ , on appelle  $X$  et  $X'$  les vecteurs colonnes de ses coordonnées dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . On a la relation :

$$X = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(I_E) X'$$

(par définition de la matrice d'une application linéaire). Cette matrice s'appelle la matrice de changement de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

## Proposition

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ . On appelle  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  dans  $E$  et  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$  dans  $F$ . On a alors :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(\varphi) = Q^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)] P$$

En particulier, si  $E=F$ , on a :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}(\varphi) = P^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)] P$$

## Proposition

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ . On appelle  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  dans  $E$  et  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$  dans  $F$ . On a alors :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(\varphi) = Q^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)] P$$

En particulier, si  $E=F$ , on a :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}(\varphi) = P^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)] P$$

## Remarque

Il est facile de voir qu'on peut toujours considérer une matrice régulière comme une matrice de changement de base.

## Proposition

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $M$  sa matrice dans une base quelconque de  $E$ . Alors  $\det M$  ne dépend pas de la base choisie, et on l'appelle le déterminant de  $\varphi$  ( $\det \varphi$ ). On a de plus :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \det \varphi \neq 0$$

## Proposition

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $M$  sa matrice dans une base quelconque de  $E$ . Alors  $\det M$  ne dépend pas de la base choisie, et on l'appelle le déterminant de  $\varphi$  ( $\det \varphi$ ). On a de plus :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \det \varphi \neq 0$$

## Proposition

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\det(\psi \circ \varphi) = \det \varphi \cdot \det \psi$$