

Applications linéaires et matrices

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

4 septembre 2016

Définition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On dit qu'une application $\varphi : E \rightarrow F$ est une application \mathbb{K} -linéaire ou que φ est un homomorphisme de \mathbb{K} -ev si :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2 & \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in E & \quad \varphi(\alpha u) = \alpha \varphi(u) \end{aligned}$$

Notion d'application linéaire

Définition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On dit qu'une application $\varphi : E \rightarrow F$ est une application \mathbb{K} -linéaire ou que φ est un homomorphisme de \mathbb{K} -ev si :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2 \quad \varphi(u + v) &= \varphi(u) + \varphi(v) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in E, \quad \varphi(\alpha u) &= \alpha \varphi(u) \end{aligned}$$

Proposition

Soit $\varphi : E \rightarrow F$, E et F deux \mathbb{K} -ev. Alors φ est linéaire ssi :

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v)$$

et on a alors :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \varphi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(u_i)$$

Remarques

- ◆ Si φ est linéaire, $\varphi(0) = 0$.
- ◆ On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E (endomorphismes de E). Il est facile de voir que $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout sev E_1 de E , $\varphi(E_1)$ est un sev de F . En particulier, $\varphi(E)$ est un sev de F , qui s'appelle l'image de φ et qui se note $Im\varphi$.

Proposition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout sev E_1 de E , $\varphi(E_1)$ est un sev de F . En particulier, $\varphi(E)$ est un sev de F , qui s'appelle l'image de φ et qui se note $Im\varphi$.

Proposition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout sev F_1 de F , $\varphi^{-1}(F_1)$ est un sev de E . En particulier, $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un sev de E qui s'appelle le noyau de φ et que l'on note $\ker \varphi$.

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- φ surjective $\iff \text{Im}\varphi = F$
- φ injective $\iff \ker \varphi = \{0\}$

Proposition

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -ev. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$.

Proposition

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -ev. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$.

Proposition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si φ est bijective, alors $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Proposition

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -ev. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$.

Proposition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si φ est bijective, alors $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Vocabulaire

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et si φ est bijective, on dit que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et que E et F sont deux ev isomorphes. Un endomorphisme bijectif de E s'appelle un automorphisme de E .

Proposition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev, E de dimension finie n . Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et u_1, u_2, \dots, u_n n vecteurs de F . Il existe alors une unique application linéaire φ de E dans F telle que, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ $\varphi(e_i) = u_i$. Autrement dit, une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image des vecteurs d'une base de E .

Proposition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev, E de dimension finie n . Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et u_1, u_2, \dots, u_n n vecteurs de F . Il existe alors une unique application linéaire φ de E dans F telle que, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ $\varphi(e_i) = u_i$. Autrement dit, une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image des vecteurs d'une base de E .

Proposition

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)\}$ est une famille génératrice de $Im\varphi$. On définit le rang de φ par : $rang\varphi = \dim Im\varphi$.

Remarque

$\text{rang} \varphi \leq \dim E$ et, si F est aussi de dimension finie,
 $\text{rang} \varphi \leq \dim F$.

Remarque

$\text{rang}\varphi \leq \dim E$ et, si F est aussi de dimension finie,
 $\text{rang}\varphi \leq \dim F$.

Proposition

Soit E de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\varphi \text{ injective} \iff \text{rang}\varphi = \dim E$$

Si de plus F est de dimension finie, alors :

$$\varphi \text{ surjective} \iff \text{rang}\varphi = \dim F$$

et donc si E et F sont de dimensions finies, alors :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \text{rang}\varphi = \dim E = \dim F$$

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

Corollaire

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, E et F deux \mathbb{K} -ev tous les deux de dimensions finies. Alors φ est bijective ssi il existe une base de E qui a pour image par φ une base de F , et alors toute base de E a pour image par φ une base de F .

Proposition

Deux \mathbb{K} -ev de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension. En particulier, tout \mathbb{K} -ev de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

Proposition

Deux \mathbb{K} -ev de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension. En particulier, tout \mathbb{K} -ev de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

Proposition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev de même dimension finie n et φ linéaire de E dans F . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) φ est bijective
- (ii) φ est surjective
- (iii) φ est injective.

Quelques notions sur les formes linéaires

On suppose dans toute la suite que E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -ev. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans \mathbb{K} . $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ se note E^* et s'appelle le dual de E .

Quelques notions sur les formes linéaires

On suppose dans toute la suite que E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -ev. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans \mathbb{K} . $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ se note E^* et s'appelle le dual de E .

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n . Le noyau de toute forme linéaire non nulle est un hyperplan de E (i.e. un sev de E de dimension $n - 1$). Inversement, tout hyperplan de E peut être considéré comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et (e_1, \dots, e_n) une base de E .
Alors toute forme linéaire sur E est de la forme :

$$\begin{aligned}\varphi & : E \rightarrow \mathbb{K} \\ u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i & \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\end{aligned}$$

où les a_i sont des éléments fixés dans \mathbb{K} .

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ on définit la forme linéaire e_i^* par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Alors la famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base de E^* . On l'appelle la base duale de la base \mathcal{B} . En particulier, $\dim E^* = n$ et E et E^* sont isomorphes.

Dans toute la suite, les \mathbb{K} -ev sont de dimension finie sur \mathbb{K} .

Définition

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux \mathbb{K} -ev, $\dim E = n$ et $\dim F = m$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ une base de E , $\mathcal{C} = (f_j)_{j=1}^m$ une base de F . On appelle matrice de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} la matrice $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ où a_{ij} est la $i^{\text{ème}}$ composante de $\varphi(e_j)$ dans la base \mathcal{C} .

On obtient cette matrice par :

$$\begin{array}{c} \varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \cdots \quad \varphi(e_n) \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On notera cette matrice par $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$ ou, s'il n'y a pas ambiguïté sur les bases, $M(\varphi)$.

Proposition

Soit M la matrice de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Soit u un élément quelconque de E et X le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} . Alors le vecteur colonne des coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base \mathcal{C} est $Y = MX$.

Proposition

Soit M la matrice de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Soit u un élément quelconque de E et X le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} . Alors le vecteur colonne des coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base \mathcal{C} est $Y = MX$.

Proposition

Soit \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une base de F . Alors l'application

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

$$\varphi \rightarrow \Phi(\varphi) = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Remarque

Il faut retenir que si φ et ψ sont deux applications linéaires de E dans F et si α est un réel, alors :

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi + \psi) = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi) + M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\psi) \text{ et } M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\alpha\varphi) = \alpha M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$$

Ceci montre aussi que $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension mn .

Proposition

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -ev de dimension finie. Soit \mathcal{B}, \mathcal{C} et \mathcal{D} une base respectivement de E, F, G . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ et soit $M = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$ et $N = M_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(\psi)$. Alors $M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(\psi \circ \varphi) = NM$.

Proposition

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -ev de dimension finie. Soit \mathcal{B}, \mathcal{C} et \mathcal{D} une base respectivement de E, F, G . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ et soit $M = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$ et $N = M_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(\psi)$. Alors $M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(\psi \circ \varphi) = NM$.

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$ sa matrice dans une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{C} de F . Alors :

$$\text{rang} \varphi = \text{rang} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$$

En particulier, si $\dim E = \dim F$, φ est bijective ssi $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$ est régulière et on a :

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi))^{-1}$$

Introduction

Soit E un ev sur \mathbb{K} de dimension n . On note I_E l'application identité de E dans E . Elle est linéaire.

Soit \mathcal{B} une base de E . Il est clair que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(I_E) = I_n$ où I_n est la matrice identité.

Introduction

Soit E un ev sur \mathbb{K} de dimension n . On note I_E l'application identité de E dans E . Elle est linéaire.

Soit \mathcal{B} une base de E . Il est clair que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(I_E) = I_n$ où I_n est la matrice identité. Soit maintenant une base \mathcal{B}' de E . La matrice de I_E dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} est obtenue en écrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} . Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{i=1}^n$, on a la matrice :

Introduction

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(I_E) = \begin{matrix} & e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\ e_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ e_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Introduction

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(I_E) = \begin{matrix} & e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\ e_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ e_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Si u est un élément fixé de E , on appelle X et X' les vecteurs colonnes de ses coordonnées dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' . On a la relation :

$$X = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(I_E) X'$$

(par définition de la matrice d'une application linéaire). Cette matrice s'appelle la matrice de changement de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F . On appelle P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' dans E et Q la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{C}' dans F . On a alors :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(\varphi) = Q^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)] P$$

En particulier, si $E=F$, on a :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}(\varphi) = P^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)] P$$

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F . On appelle P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' dans E et Q la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{C}' dans F . On a alors :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(\varphi) = Q^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)] P$$

En particulier, si $E=F$, on a :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}(\varphi) = P^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)] P$$

Remarque

Il est facile de voir qu'on peut toujours considérer une matrice régulière comme une matrice de changement de base.

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Soit M sa matrice dans une base quelconque de E . Alors $\det M$ ne dépend pas de la base choisie, et on l'appelle le déterminant de φ ($\det \varphi$). On a de plus :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \det \varphi \neq 0$$

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Soit M sa matrice dans une base quelconque de E . Alors $\det M$ ne dépend pas de la base choisie, et on l'appelle le déterminant de φ ($\det \varphi$). On a de plus :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \det \varphi \neq 0$$

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $\psi \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\det(\psi \circ \varphi) = \det \varphi \cdot \det \psi$$