

# Espaces vectoriels

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

4 septembre 2016

## Définition

On appelle structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) la donnée d'un ensemble non vide  $E$  et de deux lois de compositions  $+$  et  $\cdot$  telles que :

## Définition

On appelle structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) la donnée d'un ensemble non vide  $E$  et de deux lois de compositions  $+$  et  $\cdot$  telles que :

- $+$  est une loi de composition interne (lci) sur  $E$  qui est commutative, associative, qui possède un élément neutre (noté  $0_E$  ou  $0$ ), et pour laquelle tout élément de  $E$  admet un symétrique dans  $E$ .

## Définition

On appelle structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) la donnée d'un ensemble non vide  $E$  et de deux lois de compositions  $+$  et  $\cdot$  telles que :

- $+$  est une loi de composition interne (lci) sur  $E$  qui est commutative, associative, qui possède un élément neutre (noté  $0_E$  ou  $0$ ), et pour laquelle tout élément de  $E$  admet un symétrique dans  $E$ .
- $\cdot$  est une loi de composition externe (lce) de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  qui vérifie les 4 axiomes suivants :  
 $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  :

## Définition

On appelle structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) la donnée d'un ensemble non vide  $E$  et de deux lois de compositions  $+$  et  $\cdot$  telles que :

- $+$  est une loi de composition interne (lci) sur  $E$  qui est commutative, associative, qui possède un élément neutre (noté  $0_E$  ou  $0$ ), et pour laquelle tout élément de  $E$  admet un symétrique dans  $E$ .
- $\cdot$  est une loi de composition externe (lce) de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  qui vérifie les 4 axiomes suivants :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 :$$

- $1 \cdot u = u$

## Définition

On appelle structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) la donnée d'un ensemble non vide  $E$  et de deux lois de compositions  $+$  et  $\cdot$  telles que :

- $+$  est une loi de composition interne (lci) sur  $E$  qui est commutative, associative, qui possède un élément neutre (noté  $0_E$  ou  $0$ ), et pour laquelle tout élément de  $E$  admet un symétrique dans  $E$ .
- $\cdot$  est une loi de composition externe (lce) de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  qui vérifie les 4 axiomes suivants :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 :$$

- $1 \cdot u = u$
- $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

## Définition

On appelle structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) la donnée d'un ensemble non vide  $E$  et de deux lois de compositions  $+$  et  $.$  telles que :

- $+$  est une loi de composition interne (lci) sur  $E$  qui est commutative, associative, qui possède un élément neutre (noté  $0_E$  ou  $0$ ), et pour laquelle tout élément de  $E$  admet un symétrique dans  $E$ .
- $.$  est une loi de composition externe (lce) de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  qui vérifie les 4 axiomes suivants :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 :$$

- $1.u = u$
- $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$
- $(\alpha\beta).u = \alpha.(\beta.u)$

## Définition

On appelle structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) la donnée d'un ensemble non vide  $E$  et de deux lois de compositions  $+$  et  $.$  telles que :

- $+$  est une loi de composition interne (lci) sur  $E$  qui est commutative, associative, qui possède un élément neutre (noté  $0_E$  ou  $0$ ), et pour laquelle tout élément de  $E$  admet un symétrique dans  $E$ .
- $.$  est une loi de composition externe (lce) de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  qui vérifie les 4 axiomes suivants :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 :$$

- $1.u = u$
- $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$
- $(\alpha\beta).u = \alpha.(\beta.u)$
- $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$

## Exemples fondamentaux

$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{K}\}$  muni de :

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}\end{aligned}$$

est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \dots, 0)$ .

## Exemples fondamentaux

Soit  $D$  un ensemble non vide quelconque (presque toujours,  $D$  sera un intervalle de  $\mathbb{R}$  ou un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ) et  $E$  est l'ensemble des applications de  $D$  dans  $\mathbb{K}$ . On le munit de :

$$\begin{aligned} f + g & : D \longrightarrow \mathbb{K} \\ x & \longrightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ \lambda.f & : D \longrightarrow \mathbb{K} \\ x & \longrightarrow (\lambda.f)(x) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

C'est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel qui a pour élément neutre l'application nulle sur  $D$ .

## Exemples fondamentaux

L'ensemble des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , muni des opérations habituelles :  $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$  et  $\alpha(u_n) = (\alpha u_n)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel dont l'élément neutre est la suite nulle (tous ses termes valent 0).

## Notations et vocabulaire

Les éléments de  $E$  s'appellent des vecteurs et ceux de  $\mathbb{K}$  des scalaires.

Si  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sont  $n$  vecteurs et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont  $n$  scalaires,

l'élément de  $E$  égal à  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$  s'appelle une combinaison linéaire (C.L.) de  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

## Notations et vocabulaire

Les éléments de  $E$  s'appellent des vecteurs et ceux de  $\mathbb{K}$  des scalaires.

Si  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sont  $n$  vecteurs et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont  $n$  scalaires, l'élément de  $E$  égal à  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$  s'appelle une combinaison linéaire (C.L.) de  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

## Exercice

Montrer que  $u = (1, 2, 3)$  est une combinaison linéaire de  $u_1 = (4, 5, 6)$  et  $u_2 = (5, 7, 9)$ .

# Sous-espaces vectoriels

## Définition

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel (sev) de  $E$  tout sous-ensemble non vide de  $E$  qui est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les mêmes lois que  $E$ .

## Définition

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel (sev) de  $E$  tout sous-ensemble non vide de  $E$  qui est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les mêmes lois que  $E$ .

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Une partie  $F$  de  $E$  est un sev de  $E$  ssi :

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ est non vide} \\ F \text{ est stable par C.L.} \end{array} \right.$$

# Sous-espaces vectoriels

## Définition

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel (sev) de  $E$  tout sous-ensemble non vide de  $E$  qui est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les mêmes lois que  $E$ .

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Une partie  $F$  de  $E$  est un sev de  $E$  ssi :

$$\begin{cases} F \text{ est non vide} \\ F \text{ est stable par C.L.} \end{cases}$$

## Remarque

Tout sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev est aussi un  $\mathbb{K}$ -ev.

# Sous-espaces vectoriels

## Définition

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel (sev) de  $E$  tout sous-ensemble non vide de  $E$  qui est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les mêmes lois que  $E$ .

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Une partie  $F$  de  $E$  est un sev de  $E$  ssi :

$$\begin{cases} F \text{ est non vide} \\ F \text{ est stable par C.L.} \end{cases}$$

## Remarque

Tout sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev est aussi un  $\mathbb{K}$ -ev.

## Exercice

Montrer que  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$  est un sev de  $\mathbb{R}^3$ .

## Exemples

- L'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tels que  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$  où les  $a_i$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$  fixés est un sev de  $\mathbb{K}^n$ .

## Exemples

- L'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tels que  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$  où les  $a_i$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$  fixés est un sev de  $\mathbb{K}^n$ .
- Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $u_1, u_2, \dots, u_n$   $n$  éléments de  $E$ . Alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de  $u_1, u_2, \dots, u_n$  est un sev de  $E$ . On dit que c'est le sev engendré par la partie  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  et on le note  $\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .

## Exemples

- L'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tels que  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$  où les  $a_i$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$  fixés est un sev de  $\mathbb{K}^n$ .
- Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $u_1, u_2, \dots, u_n$   $n$  éléments de  $E$ . Alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de  $u_1, u_2, \dots, u_n$  est un sev de  $E$ . On dit que c'est le sev engendré par la partie  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  et on le note  $\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .
- L'ensemble des suites d'éléments de  $\mathbb{K}$  qui vérifient une relation de récurrence linéaire sans second membre.

## Exemples

- L'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tels que  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$  où les  $a_i$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$  fixés est un sev de  $\mathbb{K}^n$ .
- Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $u_1, u_2, \dots, u_n$   $n$  éléments de  $E$ . Alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de  $u_1, u_2, \dots, u_n$  est un sev de  $E$ . On dit que c'est le sev engendré par la partie  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  et on le note  $\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .
- L'ensemble des suites d'éléments de  $\mathbb{K}$  qui vérifient une relation de récurrence linéaire sans second membre.
- L'ensemble des fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  qui vérifient une équation différentielle linéaire homogène.

## Proposition

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$   $p$  sev d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Alors  $\bigcap_{i=1}^p F_i$  est un sev de  $E$ .

## Proposition

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$   $p$  sev d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Alors  $\bigcap_{i=1}^p F_i$  est un sev de  $E$ .

## Définition

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$   $p$  sev d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

On appelle somme de  $F_1, F_2, \dots, F_p$  l'ensemble des  $x_1 + x_2 + \dots + x_p$  où  $x_i \in F_i$  pour tout  $i$ .

On note cet ensemble  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  ( $\sum_{i=1}^p F_i$ ).

## Proposition

$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \text{Vect}\{F_1 \cup \dots \cup F_p\}$  est un sev de  $E$ . C'est le plus petit sous espace de  $E$  qui contient tous les  $F_i$ .

## Proposition

$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \text{Vect}\{F_1 \cup \dots \cup F_p\}$  est un sev de  $E$ . C'est le plus petit sous espace de  $E$  qui contient tous les  $F_i$ .

## Définition

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$   $p$  sev d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On dit

que ces sev sont en somme directe si tout élément de  $\sum_{i=1}^p F_i$

s'écrit d'une seule façon sous la forme  $\sum_{i=1}^p x_i$ ,  $x_i \in F_i$ . Autrement

dit,  $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p y_i$  avec  $x_i$  et  $y_i$  éléments de  $F_i$  pour tout  $i$ ,

implique que  $x_i = y_i$  pour tout  $i$ .

On note alors cette somme  $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ .

## Proposition

Les sev  $F_i$  sont en somme directe si et seulement si

$$F_i \cap \left( \sum_{j \neq i} F_j \right) = \{0\}.$$

## Proposition

Les sev  $F_i$  sont en somme directe si et seulement si

$$F_i \cap \left( \sum_{j \neq i} F_j \right) = \{0\}.$$

## Cas particulier

Deux sev  $F_1$  et  $F_2$  de  $E$  sont en somme directe si et seulement si  $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ .

## Proposition

Les sev  $F_j$  sont en somme directe si et seulement si

$$F_i \cap \left( \sum_{j \neq i} F_j \right) = \{0\}.$$

## Cas particulier

Deux sev  $F_1$  et  $F_2$  de  $E$  sont en somme directe si et seulement si  $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ .

## Définition

Deux sev  $F_1$  et  $F_2$  de  $E$  sont dits supplémentaires,  $F_1 \oplus F_2 = E$ , si ils sont en somme directe et si  $F_1 + F_2 = E$ . Ce qui équivaut à dire que tout élément de  $E$  s'écrit d'une seule façon comme somme d'un élément de  $F_1$  et d'un élément de  $F_2$ .

## Exercice

On se place dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ . On notera  $x = (x_1, x_2)$  les éléments de  $\mathbb{R}^2$ .

- 1 Montrer que  $D = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 + 2x_2 = 0\}$  et  $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2; 2x_1 = x_2\}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  (en donner une représentation graphique) et que  $D \cap \Delta = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
- 2 Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $x'$  défini par

$$x'_1 = \frac{4x_1}{5} - \frac{2x_2}{5} \quad x'_2 = -\frac{2x_1}{5} + \frac{x_2}{5}$$

est élément de  $D$ . En déduire que  $\mathbb{R}^2 = D \oplus \Delta$ .

## Remarque

Si  $F$  et  $G$  sont deux  $\mathbb{K}$ -ev alors  $E \cup F$  n'est pas forcément un  $\mathbb{K}$ -ev.

## Remarque

Si  $F$  et  $G$  sont deux  $\mathbb{K}$ -ev alors  $E \cup F$  n'est pas forcément un  $\mathbb{K}$ -ev.

## Exemple

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 0\}$  n'est pas un sev de  $\mathbb{R}^2$ .

## Remarque

Si  $F$  et  $G$  sont deux  $\mathbb{K}$ -ev alors  $E \cup F$  n'est pas forcément un  $\mathbb{K}$ -ev.

## Exemple

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 0\}$  n'est pas un sev de  $\mathbb{R}^2$ .

## Exercice

Soit  $E$  un espace vectoriel et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose que  $F \cup G$  est encore un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

## Définition

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Une famille finie  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  d'éléments de  $E$  est dite génératrice de  $E$  si tout élément de  $E$  peut s'écrire comme C.L. des  $u_i$ . Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie est dit de dimension finie (attention, il existe des sev qui n'admettent pas de famille génératrice finie, ils sont dits de dimension infinie).

## Définition

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Une famille finie  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  d'éléments de  $E$  est dite génératrice de  $E$  si tout élément de  $E$  peut s'écrire comme C.L. des  $u_i$ . Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie est dit de dimension finie (attention, il existe des sev qui n'admettent pas de famille génératrice finie, ils sont dits de dimension infinie).
- Une famille finie  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  d'éléments de  $E$  est dite libre (on dit aussi que les  $n$  éléments de la famille sont linéairement indépendants) si :

$$\forall (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0_E \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Une famille qui n'est pas libre est liée (les éléments de la famille sont linéairement dépendants).

## Exercice

Pour chaque espace vectoriel, déterminer une famille génératrice :

①  $A = \{(x, x + y, 2x - 3y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

②  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y - 2z = 0\}$

## Exercice

Pour chaque espace vectoriel, déterminer une famille génératrice :

①  $A = \{(x, x + y, 2x - 3y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

②  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y - 2z = 0\}$

## Exercice

Parmi les familles suivantes lesquelles sont libres ?

①  $\{(1, 2, 3); (4, 5, 6); (7, 8, 9)\}$ .

②  $\{(1, 2, 3); (4, 5, 6); (5, 7, 9)\}$ .

## Définition

Une base de  $E$  est une famille finie qui est à la fois libre et génératrice de  $E$ .

## Définition

Une base de  $E$  est une famille finie qui est à la fois libre et génératrice de  $E$ .

## Remarque

On peut voir facilement qu'une famille finie  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  ssi tout élément de  $E$  s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire des  $u_j$ . Si  $u$  est un élément de  $E$

et si  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$  est l'unique écriture de  $u$  comme combinaison

linéaire des  $u_j$ , les coefficients  $\alpha_i$  s'appellent les coordonnées de  $u$  dans la base  $(u_j)$ . On écrira  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et, dans la

mesure du possible, on distinguera  $u$  de  $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  le

vecteur colonne des coordonnées de  $u$ .

## Exercice

Soient  $E = \text{Vect}\{(1, 2, 3); (4, 5, 6); (7, 8, 9)\}$  et

$F = \text{Vect}\{(1, 2, 3); (4, 5, 6); (5, 7, 9)\}$ .

Déterminer une base de  $E$  et une base de  $F$ .

Déterminer dans cette base de  $E$  les coordonnées du vecteur  $u = (1, 1, 1)$ .

## Exemples

Base canonique de  $\mathbb{K}^n$  : on pose  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  où le 1 se trouve à la  $i^{\text{ème}}$  place. On montre facilement que  $(e_i)_{i=1}^n$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ . On l'appelle la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

Son intérêt est que si  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , alors ses coordonnées dans la base canonique sont  $u = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ .

Autrement dit, avec les notations précédentes,  $U = {}^t u$ .

## Exemples

- Si  $\mathbb{K}_n[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et de degré  $\leq n$ , la famille  $(p_i)_{i=0}^n$  où  $p_i(X) = X^i$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  que l'on appelle la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Là encore, si  $P(X) = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$ , ses coordonnées dans la base canonique sont les  $\alpha_j$ .

## Exemples

- Si  $\mathbb{K}_n[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et de degré  $\leq n$ , la famille  $(p_i)_{i=0}^n$  où  $p_i(X) = X^i$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  que l'on appelle la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Là encore, si  $P(X) = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$ , ses coordonnées dans la base canonique sont les  $\alpha_j$ .
- Attention,  $\mathbb{K}[X]$ , l'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ou l'espace des suites n'admettent pas de bases finies.

## Théorème de la base incomplète

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non réduit à  $\{0\}$ ,  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$  une famille génératrice de  $E$  et  $(v_1, v_2, \dots, v_s)$  une famille libre de  $E$  ( $s < r$ ). On peut alors compléter la famille libre par des vecteurs choisis dans la famille génératrice de façon à obtenir une base de  $E$ .

## Théorème de la base incomplète

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non réduit à  $\{0\}$ ,  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$  une famille génératrice de  $E$  et  $(v_1, v_2, \dots, v_s)$  une famille libre de  $E$  ( $s < r$ ). On peut alors compléter la famille libre par des vecteurs choisis dans la famille génératrice de façon à obtenir une base de  $E$ .

## Théorème

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, non réduit à  $\{0\}$ . Alors  $E$  admet des bases et toutes ces bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la dimension de  $E$  et se note  $\dim E$  (par convention,  $\dim \{0\} = 0$ ).

## Théorème de la base incomplète

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non réduit à  $\{0\}$ ,  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$  une famille génératrice de  $E$  et  $(v_1, v_2, \dots, v_s)$  une famille libre de  $E$  ( $s < r$ ). On peut alors compléter la famille libre par des vecteurs choisis dans la famille génératrice de façon à obtenir une base de  $E$ .

## Théorème

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, non réduit à  $\{0\}$ . Alors  $E$  admet des bases et toutes ces bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la dimension de  $E$  et se note  $\dim E$  (par convention,  $\dim \{0\} = 0$ ).

## Exemples

$\mathbb{K}^n$  est un ev de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$ .  $\mathbb{K}_n[X]$  est de dimension  $n + 1$  sur  $\mathbb{K}$ .  $\mathbb{K}[X]$  est de dimension infinie.

## Propriétés

- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une base est une famille libre maximale.
- Une base est une famille génératrice minimale.
- Si  $F$  est un sev d'un ev  $E$  de dimension finie, alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ .
- Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille d'éléments de  $E$ . Cette famille est une base de  $E$  ssi tout élément de  $E$  s'écrit d'une seule façon comme C.L. des  $u_j$ .
- Soit  $E$  un ev de dimension  $n$ .

## Propriétés

- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une base est une famille libre maximale.
- Une base est une famille génératrice minimale.
- Si  $F$  est un sev d'un ev  $E$  de dimension finie, alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ .
- Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille d'éléments de  $E$ . Cette famille est une base de  $E$  ssi tout élément de  $E$  s'écrit d'une seule façon comme C.L. des  $u_j$ .
- Soit  $E$  un ev de dimension  $n$ .
  - Toute famille libre de  $E$  a au plus  $n$  éléments.
  - Toute famille génératrice de  $E$  a au moins  $n$  éléments.
  - Toute famille libre de  $E$  à  $n$  éléments est une base de  $E$ .
  - Toute famille génératrice de  $E$  à  $n$  éléments est une base de  $E$ .

## Théorème

Si  $E$  est de dimension finie, alors tout sev  $F$  de  $E$  admet au moins un supplémentaire  $G$  dans  $E$ .

## Théorème

Si  $E$  est de dimension finie, alors tout sev  $F$  de  $E$  admet au moins un supplémentaire  $G$  dans  $E$ .

## Théorème

Soient  $F$  et  $G$  deux sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  de dimension finie.

Si  $\left\{ \begin{array}{l} F \subset G \text{ (ou } G \subset F) \\ \text{et} \\ \dim F = \dim G \end{array} \right.$  alors  $F = G$ .

## Théorème

Si  $E$  est de dimension finie, alors tout sev  $F$  de  $E$  admet au moins un supplémentaire  $G$  dans  $E$ .

## Théorème

Soient  $F$  et  $G$  deux sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  de dimension finie.

Si  $\left\{ \begin{array}{l} F \subset G \text{ (ou } G \subset F) \\ \text{et} \\ \dim F = \dim G \end{array} \right.$  alors  $F = G$ .

## Théorème

Soient  $F$  et  $G$  deux sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  de dimension finie, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .
- (ii) La somme  $F + G$  est directe et  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .
- (iii)  $E = F + G$  et  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .

## Exercice

Soient  $D = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 + 2x_2 = 0\}$  et  $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2; 2x_1 = x_2\}$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ .

- 1 Déterminer les dimensions de  $D$  et  $\Delta$ .
- 2 Montrer que  $\mathbb{R}^2 = D \oplus \Delta$ .

## Proposition : une autre caractérisation

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$   $p$  sev d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Alors  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$  si et seulement si la réunion des bases de chaque  $F_i$  est égale à une base de  $E$ .

## Proposition : une autre caractérisation

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$   $p$  sev d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Alors  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$  si et seulement si la réunion des bases de chaque  $F_i$  est égale à une base de  $E$ .

## Théorème des 4 dimensions ou Formule de Grassmann

Si  $E$  est un ev de dimension finie et si  $F$  et  $G$  sont deux sev de  $E$ , alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

## Définition

Soit  $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ .  
On appelle rang de la famille  $\mathcal{U}$ , la dimension de  
 $\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .

On montre que ce rang est égal au nombre maximum de  
vecteurs linéairement indépendants dans la famille  $\mathcal{U}$ .

# Rang d'une famille de vecteurs

## Définition

Soit  $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ .  
On appelle rang de la famille  $\mathcal{U}$ , la dimension de  $\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .

On montre que ce rang est égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants dans la famille  $\mathcal{U}$ .

## Exercice

Soit  $u_1 = (1, 1, 1)$ ;  $u_2 = (1, 1, -1)$ ;  $u_3 = (1, -1, 1)$ ;  
 $u_4 = (2, 2, -2)$ ;  $u_5 = (3, 1, 1)$  et  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par la famille  $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ .  
Déterminer le rang de  $\mathcal{U}$  (on pourra en déduire que  $E = \mathbb{R}^3$ ).

## Définition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On dit qu'une application  $\varphi : E \rightarrow F$  est une application  $\mathbb{K}$ -linéaire ou que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $\mathbb{K}$ -ev si :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \varphi(\alpha u) = \alpha \varphi(u)$$

## Définition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On dit qu'une application  $\varphi : E \rightarrow F$  est une application  $\mathbb{K}$ -linéaire ou que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $\mathbb{K}$ -ev si :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \varphi(\alpha u) = \alpha \varphi(u)$$

## Proposition

Soit  $\varphi : E \rightarrow F$ ,  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev. Alors  $\varphi$  est linéaire ssi :  
 $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v)$   
et on a alors :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \varphi \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(u_i)$$

## Remarques

- ◆ Si  $\varphi$  est linéaire alors  $\varphi(0_E) = 0_F$ .
- ◆ On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$  (endomorphismes de  $E$ ). Il est facile de voir que  $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## Remarques

- ◆ Si  $\varphi$  est linéaire alors  $\varphi(0_E) = 0_F$ .
- ◆ On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$  (endomorphismes de  $E$ ). Il est facile de voir que  $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## Exercice

Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

- 1  $f(x, y) = 2x + 3y$ .
- 2  $g(x, y, z) = (x - y, x + z, x + y + z + 2)$ .
- 3  $h(x, y, z) = (x - y, x + z, x + y + z)$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, pour tout sev  $E_1$  de  $E$ ,  $\varphi(E_1)$  est un sev de  $F$ . En particulier,  $\varphi(E)$  est un sev de  $F$ , qui s'appelle l'image de  $\varphi$  et qui se note  $Im\varphi$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, pour tout sev  $E_1$  de  $E$ ,  $\varphi(E_1)$  est un sev de  $F$ . En particulier,  $\varphi(E)$  est un sev de  $F$ , qui s'appelle l'image de  $\varphi$  et qui se note  $Im\varphi$ .

$$Im\varphi = \{v \in F / \exists u \in E \text{ avec } \varphi(u) = v\}$$

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, pour tout sev  $F_1$  de  $F$ ,  $\varphi^{-1}(F_1)$  est un sev de  $E$ . En particulier,  $\varphi^{-1}(\{0\})$  est un sev de  $E$  qui s'appelle le noyau de  $\varphi$  et que l'on note  $\ker \varphi$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, pour tout sev  $F_1$  de  $F$ ,  $\varphi^{-1}(F_1)$  est un sev de  $E$ . En particulier,  $\varphi^{-1}(\{0\})$  est un sev de  $E$  qui s'appelle le noyau de  $\varphi$  et que l'on note  $\ker \varphi$ .

$$\ker \varphi = \{u \in E / \varphi(u) = 0_F\}$$

## Proposition

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

- $\varphi$  surjective  $\iff \text{Im}\varphi = F$
- $\varphi$  injective  $\iff \ker \varphi = \{0\}$

## Proposition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ .  
Alors  $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$ .

## Proposition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ .  
Alors  $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
Si  $\varphi$  est bijective, alors  $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .

## Proposition

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ .  
Alors  $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
Si  $\varphi$  est bijective, alors  $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .

## Vocabulaire

Si  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $\varphi$  est bijective, on dit que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels et que  $E$  et  $F$  sont deux ev isomorphes. Un endomorphisme bijectif de  $E$  s'appelle un automorphisme de  $E$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev,  $E$  de dimension finie  $n$ .

Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $u_1, u_2, \dots, u_n$   $n$  vecteurs de  $F$ . Il existe alors une unique application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  telle que, pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$   $\varphi(e_i) = u_i$ .

Autrement dit, une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image des vecteurs d'une base de  $E$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev,  $E$  de dimension finie  $n$ .

Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $u_1, u_2, \dots, u_n$   $n$  vecteurs de  $F$ . Il existe alors une unique application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  telle que, pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$   $\varphi(e_i) = u_i$ .

Autrement dit, une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image des vecteurs d'une base de  $E$ .

## Proposition

Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Alors  $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)\}$  est une famille génératrice de  $Im\varphi$ . On définit le rang de  $\varphi$  par :  $rang\varphi = \dim Im\varphi$ .

## Remarque

$\text{rang} \varphi \leq \dim E$  et, si  $F$  est aussi de dimension finie,  
 $\text{rang} \varphi \leq \dim F$ .

## Remarque

$\text{rang}\varphi \leq \dim E$  et, si  $F$  est aussi de dimension finie,  
 $\text{rang}\varphi \leq \dim F$ .

## Proposition

Soit  $E$  de dimension finie et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\varphi \text{ injective} \iff \text{rang}\varphi = \dim E$$

Si de plus  $F$  est de dimension finie, alors :

$$\varphi \text{ surjective} \iff \text{rang}\varphi = \dim F$$

et donc si  $E$  et  $F$  sont de dimensions finies, alors :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \text{rang}\varphi = \dim E = \dim F$$

# Théorème du rang

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Corollaire

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev tous les deux de dimensions finies. Alors  $\varphi$  est bijective ssi il existe une base de  $E$  qui a pour image par  $\varphi$  une base de  $F$ , et alors toute base de  $E$  a pour image par  $\varphi$  une base de  $F$ .

## Proposition

Deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension. En particulier, tout  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

## Proposition

Deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension. En particulier, tout  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

## Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie  $n$  et  $\varphi$  linéaire de  $E$  dans  $F$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\varphi$  est bijective.
- (ii)  $\varphi$  est surjective.
- (iii)  $\varphi$  est injective.

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

# Théorème du rang : preuve

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Preuve

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\ker \varphi$ . On la complète en une base de  $E$  par  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  (Théorème de la base incomplète).

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Preuve

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\ker \varphi$ . On la complète en une base de  $E$  par  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  (Théorème de la base incomplète).

On sait que  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p), \varphi(e_{p+1}), \dots, \varphi(e_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im} \varphi$ .

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Preuve

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\ker \varphi$ . On la complète en une base de  $E$  par  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  (Théorème de la base incomplète).

On sait que  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p), \varphi(e_{p+1}), \dots, \varphi(e_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im} \varphi$ . Comme les  $e_i$  pour  $i = 1, \dots, p$  sont dans  $\ker \varphi$ ,  $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_p) = 0$ . Donc la famille  $(\varphi(e_{p+1}), \dots, \varphi(e_n))$  est génératrice de  $\text{Im} \varphi$ .

# Théorème du rang : preuve

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

# Théorème du rang : preuve

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Preuve

Montrons qu'elle est libre :

# Théorème du rang : preuve

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Preuve

Montrons qu'elle est libre : soit  $\alpha_i$  des scalaires tels que :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i \varphi(e_i) = 0 \Rightarrow \varphi \left( \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \right) = 0 \quad (\varphi \text{ linéaire})$$

# Théorème du rang : preuve

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Preuve

Montrons qu'elle est libre : soit  $\alpha_i$  des scalaires tels que :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i \varphi(e_i) = 0 \Rightarrow \varphi \left( \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \right) = 0 \quad (\varphi \text{ linéaire})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \in \ker \varphi \Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^p \beta_i e_i$$

# Théorème du rang : preuve

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Preuve

Montrons qu'elle est libre : soit  $\alpha_i$  des scalaires tels que :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i \varphi(e_i) = 0 \Rightarrow \varphi \left( \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \right) = 0 \quad (\varphi \text{ linéaire})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \in \ker \varphi \Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^p \beta_i e_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^p \beta_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ et } \beta_i = 0 \quad (\text{les } e_i \text{ forment une base})$$

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Preuve

Montrons qu'elle est libre : soit  $\alpha_i$  des scalaires tels que :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i \varphi(e_i) = 0 \Rightarrow \varphi \left( \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \right) = 0 \quad (\varphi \text{ linéaire})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \in \ker \varphi \Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^p \beta_i e_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^p \beta_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ et } \beta_i = 0 \quad (\text{les } e_i \text{ forment une base})$$

$$\Rightarrow \text{la famille } (\varphi(e_{p+1}), \dots, \varphi(e_n)) \text{ est libre.}$$

# Théorème du rang : preuve

## Théorème du rang

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$

## Preuve

Montrons qu'elle est libre : soit  $\alpha_i$  des scalaires tels que :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i \varphi(e_i) = 0 \Rightarrow \varphi \left( \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \right) = 0 \quad (\varphi \text{ linéaire})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \in \ker \varphi \Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^p \beta_i e_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^p \beta_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ et } \beta_i = 0 \quad (\text{les } e_i \text{ forment une base})$$

$\Rightarrow$  la famille  $(\varphi(e_{p+1}), \dots, \varphi(e_n))$  est libre.

C'est donc une base de  $\text{Im} \varphi$ . D'où  $\text{rang} \varphi = n - p$ , ce qui donne l'égalité.

# Quelques notions sur les formes linéaires

On suppose dans toute la suite que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

## Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On appelle forme linéaire sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  se note  $E^*$  et s'appelle le dual de  $E$ .

# Quelques notions sur les formes linéaires

On suppose dans toute la suite que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

## Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On appelle forme linéaire sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  se note  $E^*$  et s'appelle le dual de  $E$ .

## Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ . Le noyau de toute forme linéaire non nulle est un hyperplan de  $E$  (i.e. un sev de  $E$  de dimension  $n - 1$ ). Inversement, tout hyperplan de  $E$  peut être considéré comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.

## Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .  
Alors toute forme linéaire sur  $E$  est de la forme :

$$\begin{aligned}\varphi & : E \rightarrow \mathbb{K} \\ u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i & \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\end{aligned}$$

où les  $a_i$  sont des éléments fixés dans  $\mathbb{K}$ .

## Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$  on définit la forme linéaire  $e_i^*$  par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Alors la famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$ . On l'appelle la base duale de la base  $\mathcal{B}$ . En particulier,  $\dim E^* = n$  et  $E$  et  $E^*$  sont isomorphes.

# Matrice d'une application linéaire

## Introduction

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $p$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On sait que  $\varphi$  est entièrement déterminée par la donnée de  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)$ , mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $F$ .

# Matrice d'une application linéaire

## Introduction

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $p$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On sait que  $\varphi$  est entièrement déterminée par la donnée de  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)$ , mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $F$ .

Notons  $\underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(\varphi(e_j)) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$  pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , c'est-à-dire :

# Matrice d'une application linéaire

## Introduction

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $p$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On sait que  $\varphi$  est entièrement déterminée par la donnée de  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)$ , mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $F$ .

Notons  $\underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(\varphi(e_j)) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$  pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$$

# Matrice d'une application linéaire

## Introduction

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $p$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On sait que  $\varphi$  est entièrement déterminée par la donnée de  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)$ , mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $F$ .

Notons  $coord_{\mathcal{B}'}(\varphi(e_j)) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$  pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$$

On obtient ainsi une matrice  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  cette matrice est définie par :

$$c_j(A) = coord_{\mathcal{B}'}(\varphi(e_j))$$

où  $c_j(A)$  représente le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de la matrice  $A$ .

# Matrice d'une application linéaire

## Construction de cette matrice

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(\varphi) = mat(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{cccc} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_p) \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{array} \right) & \rightarrow & u_1 \\ & & & & \rightarrow u_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & \rightarrow u_n \end{array}$$

# Matrice d'une application linéaire

## Construction de cette matrice

$$\begin{array}{ccccccc} & & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_p) & \\ & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{mat}(\varphi) = \text{mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = & \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{array} \right) & \begin{array}{l} \rightarrow u_1 \\ \rightarrow u_2 \\ \vdots \\ \rightarrow u_n \end{array} \end{array}$$

## Cas particuliers des endomorphismes



Lorsque l'espace d'arrivée est le même que celui de départ ( $F = E$ ), on choisit en général la même base à l'arrivée qu'au départ ( $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ ), on note  $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\varphi) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , c'est une matrice carrée.

## Exercice

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - 3z)$ .

- Déterminer  $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$ .
- Déterminer  $B = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}{\text{mat}}(f)$  où  $\mathcal{B}'' = (e'_1 + e'_2, e'_1 - e'_2)$ .

## Exercice

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - 3z)$ .

- Déterminer  $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$ .
- Déterminer  $B = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}{\text{mat}}(f)$  où  $\mathcal{B}'' = (e'_1 + e'_2, e'_1 - e'_2)$ .

## Exercice

Déterminer l'application linéaire  $g$  définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  donnée par :

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(g) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$