

Aucun document autorisé - Téléphones portables, calculatrices et tout accessoire électronique interdits.

EXERCICE 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f n'est pas diagonalisable.

SOLUTION

$$P_A(X) = (1 - X)^4$$

Supposons que A soit diagonalisable. Dans ce cas A est semblable à la matrice I_4 , i.e., il existe une matrice P telle que $P^{-1}AP = I_4$ d'où $A = P \times I_4 \times P^{-1}$ soit $A = I_4$, ce qui est absurde...

EXERCICE 2

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 8u_{n+1}$.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. On admet qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A puis en déduire que A est diagonalisable.

SOLUTION

$$P_A(X) = -X(2 - X)(4 - X)$$

Les valeurs propres sont simples et distinctes donc A est diagonalisable.



2. Déterminer P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base de vecteurs propres.

SOLUTION

$$E(0) = \text{Vect}\{(1, 0, 0)\} \text{ et } E(2) = \text{Vect}\{(1, 2, 4)\} \text{ et } E(4) = \text{Vect}\{(1, 4, 16)\}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$



3. Déterminer P^{-1} en utilisant la méthode de votre choix.

**SOLUTION**

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & -6 & 1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$



4. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale.

**SOLUTION**

$$P^{-1}AP = \dots = D$$



5. Calculer A^n pour tout entier naturel n .

**SOLUTION**

De $D = P^{-1}AP$, on en déduit :

$$D^n = P^{-1}AP \times \dots \times P^{-1}AP = P^{-1}A^nP \text{ soit } A^n = PD^nP^{-1}$$

D'où pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^n - \frac{4^n}{4} & \frac{4^n}{8} - \frac{2^n}{4} \\ 0 & 2^{n+1} - 4^n & \frac{4^n}{2} - \frac{2^n}{2} \\ 0 & 2^{n+2} - 4^{n+1} & 2 \cdot 4^n - 2^n \end{pmatrix}$$



6. En déduire u_n en fonction de u_1 , u_2 et n .

**SOLUTION**

$$\text{Or, } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = AX_{n-1} = AX_{n-2} = \dots = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$D'où u_n = \left(2^n - \frac{4^n}{4}\right) u_1 + \left(\frac{4^n}{8} - \frac{2^n}{4}\right) u_2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

**EXERCICE 3**

La fonction coût liée à la production de x unités du bien X et de y unités de bien Y est donnée par

$$C(x, y) = 2x^2 + 2xy + 4y^2 - 12x - 20y$$

Montrer que C admet un minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ en un point que l'on déterminera.



SOLUTION

C est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Les dérivées premières sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x}(x, y) = 4x + 2y - 12 \\ \frac{\partial C}{\partial y}(x, y) = 2x + 8y - 20 \end{cases}$$

C est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (ouvert), donc les points critiques de f sont solutions du système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ 2x + 8y = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Le point de coordonnées $(2; 2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est l'unique point critique de C sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

En ce point, C admet un extremum local éventuel.

Pour déterminer si le point critique est effectivement un extremum local, il faut étudier la condition du second ordre qui porte sur le signe de $\det(H_C(x, y))$.

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, y) = 4 \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}(x, y) = 8 \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x}(x, y) = 2 \end{cases}$$

D'où :

$$H_C(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\begin{cases} \det(H_C(x, y)) = 28 > 0 \\ \text{tr}(H_C(x, y)) = 12 > 0 \end{cases}$$

Conclusion : C est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Donc C admet en $(2; 2)$ un minimum global qui vaut $C(2; 2) = -32$.



EXERCICE 4

On considère la fonction f définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz + y - z$$

1. Vérifier que le point de coordonnées $(1, 1, -1)$ est un point critique de f .



SOLUTION

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.

Les dérivées premières sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = x + yz \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy - 1 \end{cases}$$

On vérifie que $\text{grad } f(1, 1, -1) = (0; 0; 0)$... donc $(1; 1; -1)$ est bien un point critique de f sur $\mathbb{R}^3$.

f admet en ce point un extremum local éventuel.



2. Déterminer la matrice hessienne de f .



SOLUTION

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = z \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = x \end{array} \right.$$

D'où :

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$



3. Déterminer la matrice hessienne de f au point $(1, 1, -1)$.



SOLUTION

$$H_f(1, 1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



4. En utilisant la méthode des mineurs diagonaux principaux, en déduire la nature du point critique $(1, 1, -1)$.



SOLUTION

Etudions les signes des trois mineurs diagonaux principaux :

$$M_1 = |1| = 1, M_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \text{ ABSURDE.}$$

Le signe de M_2 nous apporte une "contradiction" au niveau des signes, donc la forme quadratique associée à $H_f(1, 1, -1)$ est de signe variable.

Conclusion : $(1, 1, -1)$ est un point selle.