

Corrigé de l'exercice 99

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - 2x^2 + y^2$$

1. Trouver les extrema locaux éventuels de f .
2. En utilisant la matrice hessienne de f , déterminer la nature des points critiques de f .
3. On veut maintenant trouver les extrema de f sur le domaine :

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que : } -3 \leq x \leq 3 ; -3 \leq y \leq 3\}$$

- (a) Donner une représentation graphique de Δ permettant d'identifier clairement les sommets.
- (b) Montrer que f possède des extrema sur Δ .
- (c) Déterminer, en étudiant successivement l'intérieur et les arêtes de Δ , l'ensemble des points où f admet un minimum et un maximum sur Δ .

INDICATION

$$f\left(\frac{2-\sqrt{22}}{3}; -3\right) \simeq 12 \text{ et } f\left(\frac{2+\sqrt{22}}{3}; -3\right) \simeq -3, 2.$$

1. f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 .

Les dérivées premières sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2y - 4x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y \end{cases}$$

f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 (ouvert), donc les points critiques de f sont solutions du système suivant

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x^2 + 2y - 4x = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x(x - 2) = 0 \\ x = -y \end{cases} \\ &\iff (x, y) \in \{(0, 0), (2, -2)\} \end{aligned}$$

Les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(2; -2)$ sont des points critiques de f sur \mathbb{R}^2 .

2. Pour déterminer si les points critiques sont effectivement des extrema locaux, il faut étudier la condition du second ordre qui porte sur le signe de $\det(H_f(x, y))$.

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x - 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2 \end{cases}$$

D'où :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

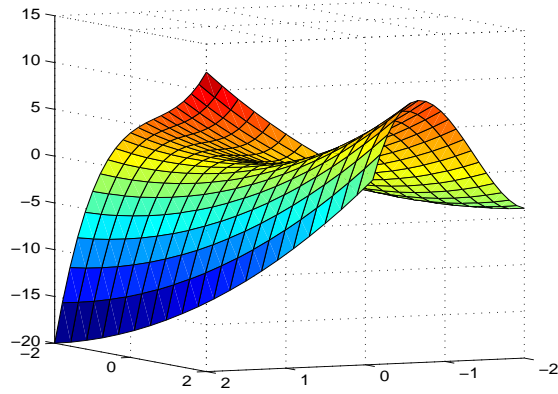


FIGURE 1 – Point col de f en $(0, 0)$

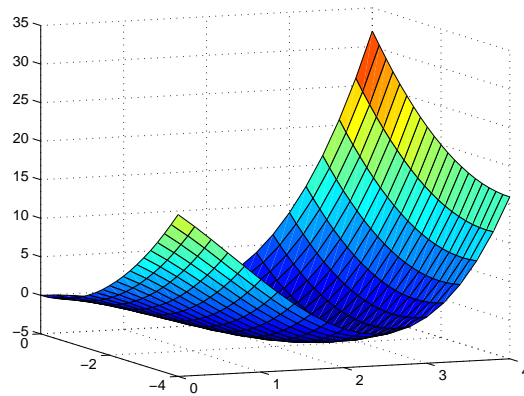


FIGURE 2 – Minimum local de f atteint en $(2, -2)$

Donc

$$\det(H_f(x, y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2$$

On trouve alors

$$\det(H_f(x, y)) = 12(x - 1)$$

On a $\det(H_f(0, 0)) = -12 < 0$ donc f présente en $(0, 0)$ un point col (on pouvait aussi préciser que la forme quadratique associée à $H_f(0, 0)$ est de signe variable).

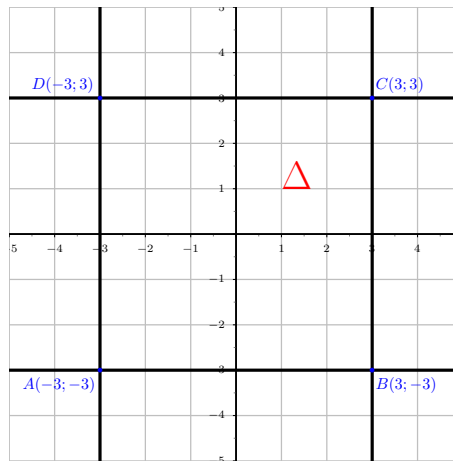
On a $\det(H_f(2, -2)) = 12 > 0$ donc f présente en $(2, -2)$ un extremum local. Pour savoir s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum local, on regarde le signe de $\text{tr}(H_f(2, -2))$.

On a $\text{tr}(H_f(2, -2)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, -2) = 10 > 0$ donc f présente en $(2, -2)$ un minimum local qui vaut $f(2, -2) = -4$ (on pouvait aussi préciser que la forme quadratique associée à $H_f(2, -2)$ est définie positive).

3.

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que : } -3 \leq x \leq 3 ; -3 \leq y \leq 3 \}$$

(a) Donner une représentation graphique de Δ permettant d'identifier clairement les sommets.



- (b) f est continue sur Δ , compact de \mathbb{R}^2 (ou fermé borné de \mathbb{R}^2), donc f admet des extrema globaux sur Δ .
- (c) Les points $(0, 0)$ et $(2, -2)$ sont les points critiques de f sur $\overset{\circ}{\Delta}$. Ces points ne sont pas au bord du domaine $[-3, 3] \times [-3, 3]$ (ils sont à l'intérieur du pavé $[-3, 3] \times [-3, 3]$) donc ils gardent leur caractère local à savoir $(0, 0)$ est un point col et -4 est un minimum local de f atteint en $(2, -2)$.

Etude de f sur [AB] : $y = -3$ et $-3 \leq x \leq 3$

$$f(x, -3) = x^3 - 2x^2 - 6x + 9 = g(x), \quad g'(x) = 0 \iff 3x^2 - 4x - 6 = 0 \quad (\Delta = 88)$$

$$g'(x) = 0 \iff x = \frac{2 - \sqrt{22}}{3} \in [-3; 3] \text{ ou } x = \frac{2 + \sqrt{22}}{3} \in [-3; 3]$$

De plus, $g\left(\frac{2 - \sqrt{22}}{3}\right) \simeq 12$ et $g\left(\frac{2 + \sqrt{22}}{3}\right) \simeq -3, 2$.

| | | | | | | |
|---------|-----|---|---|---|---|---|
| x | -3 | $\frac{2 - \sqrt{22}}{3}$ | $\frac{2 + \sqrt{22}}{3}$ | 3 | | |
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + |
| $g(x)$ | -18 | $g\left(\frac{2 - \sqrt{22}}{3}\right)$ | $g\left(\frac{2 + \sqrt{22}}{3}\right)$ | 0 | | |

Conclusion : f admet en $\left(\frac{2 - \sqrt{22}}{3}; -3\right)$ un maximum qui vaut $f\left(\frac{2 - \sqrt{22}}{3}; -3\right) \simeq 12$ et un minimum en $A(-3; -3)$ qui vaut -18 .

Etude de f sur [BC] : $x = 3$ et $-3 \leq y \leq 3$

$$f(3, y) = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2 = h(y)$$

| | | |
|---------|----|----|
| y | -3 | 3 |
| $h'(y)$ | | + |
| $h(y)$ | 0 | 36 |

Conclusion : f admet en $C(3; 3)$ un maximum qui vaut 36 et un minimum en $B(3; -3)$ qui vaut 0.

Etude de f sur [CD] : $y = 3$ et $-3 \leq x \leq 3$

$$f(x, 3) = x^3 - 2x^2 + 6x + 9 = k(x), \quad k'(x) = 0 \iff 3x^2 - 4x + 6 = 0 \quad (\Delta = -56 < 0)$$

| | | |
|---------|-----|----|
| x | -3 | 3 |
| $k'(x)$ | + | |
| $k(x)$ | -54 | 36 |



Conclusion : f admet en $C(3; 3)$ un maximum qui vaut 36 et un minimum en $D(-3; 3)$ qui vaut -54.

Etude de f sur [AD] : $x = -3$ et $-3 \leq y \leq 3$

$$f(-3, y) = y^2 - 6y - 45 = l(y), \quad l'(y) = 0 \iff 2y - 6 = 0$$

| | | |
|---------|-----|-----|
| y | -3 | 3 |
| $h'(y)$ | - | |
| $h(y)$ | -18 | -54 |

Conclusion : f admet en $A(-3; -3)$ un maximum qui vaut -18 et un minimum en $D(-3; 3)$ qui vaut -54.

| |
|---|
|  SOLUTION  f admet sur Δ un maximum global en $C(3; 3)$ qui vaut 36 et un minimum global en $D(-3; 3)$ qui vaut -54. |
|---|