

Kit de survie

1 Estimation d'une moyenne, dans le cas où la variance σ^2 est connue

- On estime la moyenne μ par \bar{X}_n .
- Par le TCL, on sait que $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0; 1)$.
- Étant donnée une marge d'erreur α , (par ex 5%), on détermine alors un certain u_α à l'aide de la table de la $\mathcal{N}(0; 1)$, tel que

$$\mathbb{P}(|Z| \leq u_\alpha) \geq 1 - \alpha, \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0; 1).$$

On pourra remarquer que $u_\alpha = z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Pi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$.

- Ainsi avec proba $\geq 1 - \alpha$, on a : $|\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu)| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, i.e. :

$$\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2 Estimation d'une moyenne, dans le cas où la variance σ^2 est inconnue

- On utilise le fait que $T = \frac{\sqrt{n}}{\hat{S}_{n-1}}(\bar{X}_n - \mu)$ suit une loi de *Student*($n - 1$).
- Étant donnée une marge d'erreur α , on détermine alors un certain t_α à l'aide de la table de la loi de student, tel que

$$\mathbb{P}(|T| \leq t_\alpha) \geq 1 - \alpha, \quad \text{où } T \sim \text{Student}(n - 1).$$

- On conclut, qu'avec proba au moins $1 - \alpha$, on a :

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{\hat{S}_{n-1}}(\bar{X}_n - \mu) \right| \leq t_\alpha.$$

$$\bar{X}_n - t_\alpha \frac{\hat{S}_{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + t_\alpha \frac{\hat{S}_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

3 Intervalle de confiance d'une proportion

Soit A un évènement aléatoire de proba p .
On appelle $\hat{p} = \frac{1}{n} \times$ nombre de fois où X_i réalise A .
 \hat{p} est un estimateur sans biais de p .

On peut alors en déduire :

$$\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

4 Test bilatéral d'une moyenne, cas où σ connu

On veut tester l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

- Si $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu_0) \in [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}]$, on ne rejette pas H_0 .
- Sinon on rejette H_0 .

5 Test bilatéral d'une moyenne, cas d'un échantillon Gaussien et σ inconnu

On veut tester l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Sous H_0 , on sait que la v.a,

$$T_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{\hat{S}_{n-1}}(\bar{X}_n - \mu_0) \text{ suit une loi de } Student(n-1)$$

- Si $T_{n-1} \in [-t_\alpha; t_\alpha]$, on ne rejette pas H_0 .
- Sinon on rejette H_0 .

6 Test unilatéral d'une moyenne, cas d'un échantillon Gaussien et σ connu

On veut tester l'hypothèse $H_0 : \mu < \mu_0$ contre $H_1 : \mu \geq \mu_0$.

Ainsi, on a la même discussion,

- Si $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu_0) \in [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}]$, on ne rejette pas H_0 .
- Sinon on rejette H_0 .

7 Test unilatéral d'une moyenne, cas d'un échantillon Gaussien et σ inconnu

On veut tester l'hypothèse $H_0 : \mu < \mu_0$ contre $H_1 : \mu \geq \mu_0$.

- Si $T_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{\hat{S}_{n-1}}(\bar{X}_n - \mu_0) \in [-t_{2\alpha}; t_{2\alpha}]$, on ne rejette pas H_0 .
- Sinon on rejette H_0 .

8 Test bilatéral d'une proportion

On veut tester l'hypothèse $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$.

- Si $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \in [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}]$, on ne rejette pas H_0 .
- Sinon on rejette H_0 .

9 Test unilatéral d'une proportion

On veut tester l'hypothèse $H_0 : p < p_0$ contre $H_1 : p \geq p_0$.

- Si $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq z_{1-\alpha}$, on ne rejette pas H_0 .
- Sinon on rejette H_0 .