

Épisode IV : Variables aléatoires à densité

EXERCICE 1

Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} c(a^2 - x^2) & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c .
2. Donner la fonction de répartition de X .
3. Calculer l'espérance et la variance de X .

EXERCICE 2

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -\frac{x}{4} + x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X .
2. Déterminer une densité de X . Calculer $\mathbb{P}(X > 1,5)$ et $\mathbb{P}(X < 0,5)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE 3

La densité de la variable aléatoire X mesurant la durée de vie en heures d'un certain composant électronique est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{si } x > 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculez $\mathbb{P}(X > 20)$.
2. Déterminez la fonction de répartition de X .
3. Quelle est la probabilité que parmi 10 composants, au moins 3 d'entre eux fonctionnent au moins 15 heures (précisez bien les hypothèses que vous faites)?
4. Calculez $\mathbb{E}(X)$.

EXERCICE 4

La durée de vie X en années d'un ordinateur est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de densité :

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} \text{ pour } x \geq 0$$

1. Quelle est la probabilité qu'un ordinateur neuf ait une durée de vie de plus de 4 ans? Quelle est la durée de vie moyenne d'un ordinateur? Sa variance?
2. Un ordinateur a fonctionné pendant deux ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 4 ans de plus? Généraliser. Conclusion?

EXERCICE 5

Un entrepreneur doit estimer le temps nécessaire à l'exécution d'un chantier. Les incertitudes dues au marché du travail, à l'approvisionnement, aux conditions atmosphériques ...constituent une inconnue. Néanmoins, il affirme qu'il a une probabilité de 10 % de réaliser le travail en plus de 190 jours et de 5 % de le réaliser en moins de 50 jours. En supposant que la durée du chantier est une variable aléatoire qui suit une loi normale, déterminer ses paramètres. Calculer alors la probabilité que la durée du chantier excède 200 jours.

EXERCICE 6

Le Samedi soir, la police effectue un contrôle d'alcoolémie. Les conducteurs dont le taux d'alcoolémie dépasse 0.5 g/l sont verbalisés. Si leur taux d'alcool dépasse 0.8 g/l, ils risquent une suspension de permis. On suppose que le taux d'alcoolémie d'un conducteur pris au hasard est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne 0.4 et d'écart-type 0.1.

1. Quelle est la probabilité qu'un conducteur pris au hasard soit verbalisé?
2. Parmi les conducteurs verbalisés, quelle est la proportion de ceux qui risquent un retrait de permis?

EXERCICE 7

Les pièces détachées d'une voiture sont souvent copiées et vendues comme pièces d'origine. On veut remplacer certaines pièces d'une voiture. La probabilité d'acheter une pièce d'origine est $1/4$, et celle d'acheter une pièce piratée est $3/4$. La durée de vie d'une pièce peut être considérée comme un variable aléatoire qui suit une loi exponentielle, de moyenne 2 pour une pièce piratée, et de moyenne 5 pour une pièce d'origine. Soit T la variable aléatoire égale à la durée de vie d'une pièce que l'on achète. Supposons que la pièce ait survécu jusqu'au temps t après son installation. Quelle est la probabilité $\pi(t)$ que cette pièce soit piratée? Quelle est la limite de $\pi(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$?