Connaissance initiale et résultats d'impossibilité en algorithmique distribuée

David Ilcinkas

CNRS & Université de Bordeaux (LaBRI)

Groupe de travail MoVe, au LIF
24 octobre 2012

Algorithmique de graphes

Cas centralisé

- 1 algorithme
- Connaissance totale de l'instance

Cas distribué

- n algorithmes (un par sommet)
- Connaissance (initiale) partielle de l'instance

Algorithmique de graphes

Cas centralisé

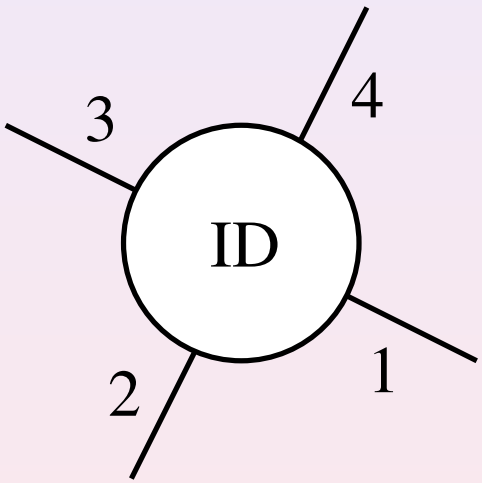
- 1 algorithme
- Connaissance totale de l'instance

Cas distribué

- n algorithmes (un par sommet)
- Connaissance (initiale) partielle de l'instance

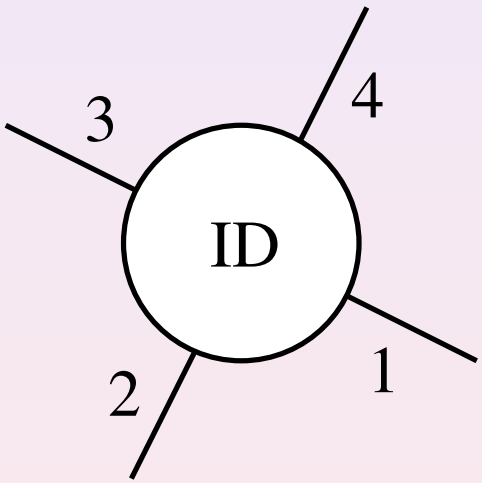
Types de connaissance

Connaissance locale



Types de connaissance

Connaissance locale



Connaissance globale

- nombre de sommets
- diamètre
- degré maximum
- genre, maille, treewidth, etc.

Connaissance et performance

Observation

La qualité/existence des solutions algorithmiques dépendent souvent de la disponibilité de connaissance globale sur le réseau.

- [Lynch, PODC 1989] : A hundred impossibility proofs for distributed computing.
- [Fich, Ruppert, Distributed Computing, 2003] : Hundreds of impossibility results for distributed computing.

Quelques exemples

Diffusion déterministe synchrone dans les réseaux radio

- Temps $\Omega(n \log D)$ si aucune information [CMS01]
- Temps $O(D + \log^2 n)$ si connaissance complète [KP06]

Réveil (wakeup) dans les réseaux filaires [AGPV90]

Connaissance du voisinage à distance ρ

- $O(n^{1+\Theta(1)/\rho})$ messages de taille bornée

Quelques exemples

Diffusion déterministe synchrone dans les réseaux radio

- Temps $\Omega(n \log D)$ si aucune information [CMS01]
- Temps $O(D + \log^2 n)$ si connaissance complète [KP06]

Réveil (wakeup) dans les réseaux filaires [AGPV90]

Connaissance du voisinage à distance ρ

- $O(n^{1+\Theta(1)/\rho})$ messages de taille bornée

Sur la nécessité d'une connaissance a priori

[A. Korman, J.-S. Sereni and L.Viennot. Toward more Localized Local Algorithms : Removing Assumptions concerning Global Knowledge. PODC'2011]

Résultat

Le papier présente une méthode plutôt générale pour transformer un algorithme de telle manière qu'il ne nécessite plus de connaissance globale connue a priori.

- l'algorithme transformé conserve la même complexité en temps asymptotique
- la méthode fonctionne pour de nombreux algorithmes déterministes et probabilistes ; en particulier MIS, Maximal Matching, coloring...

Sur la nécessité d'une connaissance a priori

[A. Korman, J.-S. Sereni and L.Viennot. Toward more Localized Local Algorithms : Removing Assumptions concerning Global Knowledge. PODC'2011]

Résultat

Le papier présente une méthode plutôt générale pour transformer un algorithme de telle manière qu'il ne nécessite plus de connaissance globale connue a priori.

- l'algorithme transformé conserve la même complexité en temps asymptotique
- la méthode fonctionne pour de nombreux algorithmes déterministes et probabilistes ; en particulier MIS, Maximal Matching, coloring...

Cas d'étude : exploration de graphes avec terminaison

Exploration de graphes...

Une entité mobile (robot/agent) doit visiter au moins une fois chaque sommet d'un graphe anonyme.

...avec terminaison

L'entité mobile doit s'arrêter au bout d'un temps fini, i.e. détecter la terminaison.

Anonyme :

- sommets sans identifiant
- étiquetage local des arêtes (numéros de port)

Cas d'étude : exploration de graphes avec terminaison

Exploration de graphes...

Une entité mobile (robot/agent) doit visiter au moins une fois chaque sommet d'un graphe anonyme.

...avec terminaison

L'entité mobile doit s'arrêter au bout d'un temps fini, i.e. détecter la terminaison.

Anonyme :

- sommets sans identifiant
- étiquetage local des arêtes (numéros de port)

Cas d'étude : exploration de graphes avec terminaison

Exploration de graphes...

Une entité mobile (robot/agent) doit visiter au moins une fois chaque sommet d'un graphe anonyme.

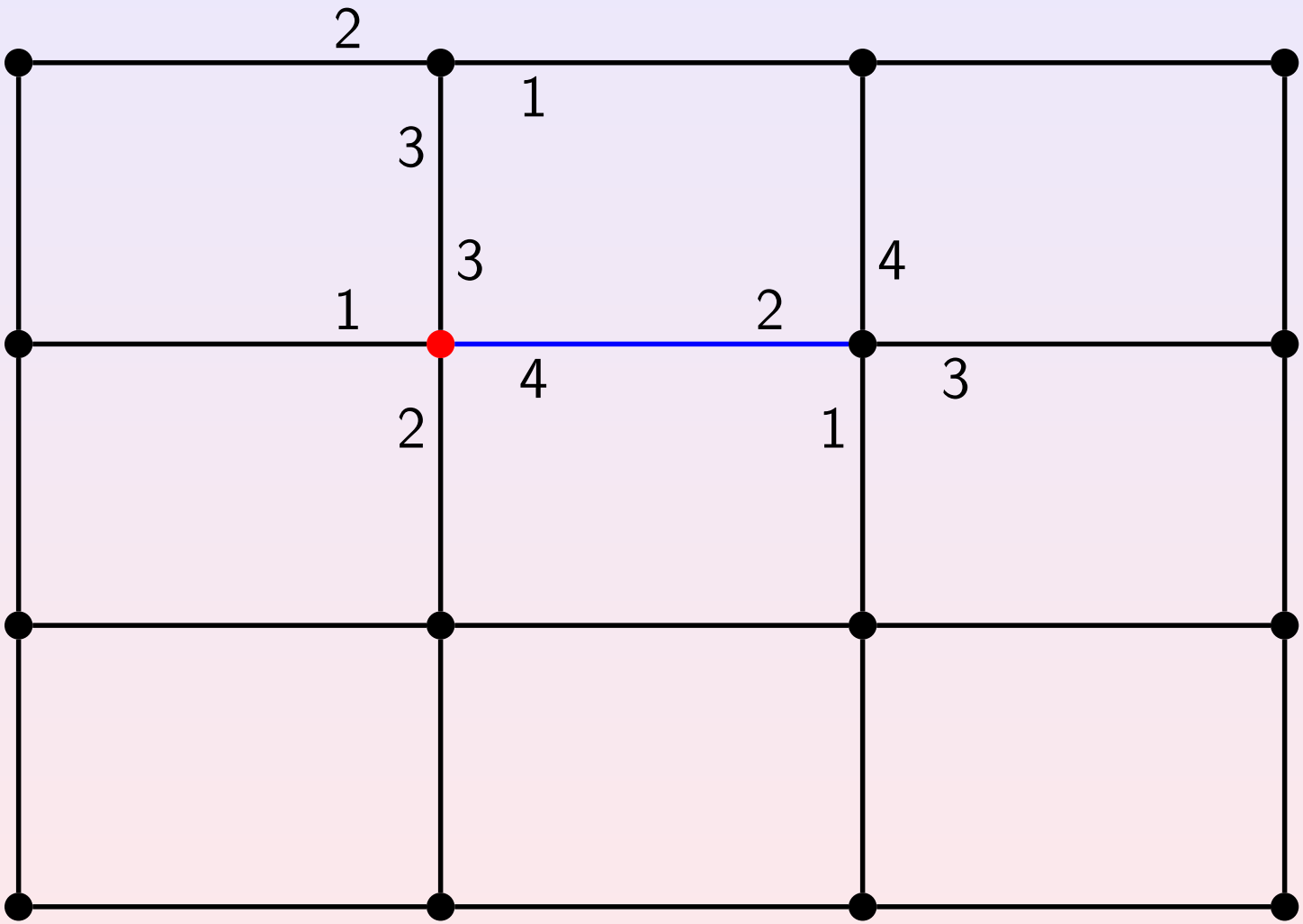
...avec terminaison

L'entité mobile doit s'arrêter au bout d'un temps fini, i.e. détecter la terminaison.

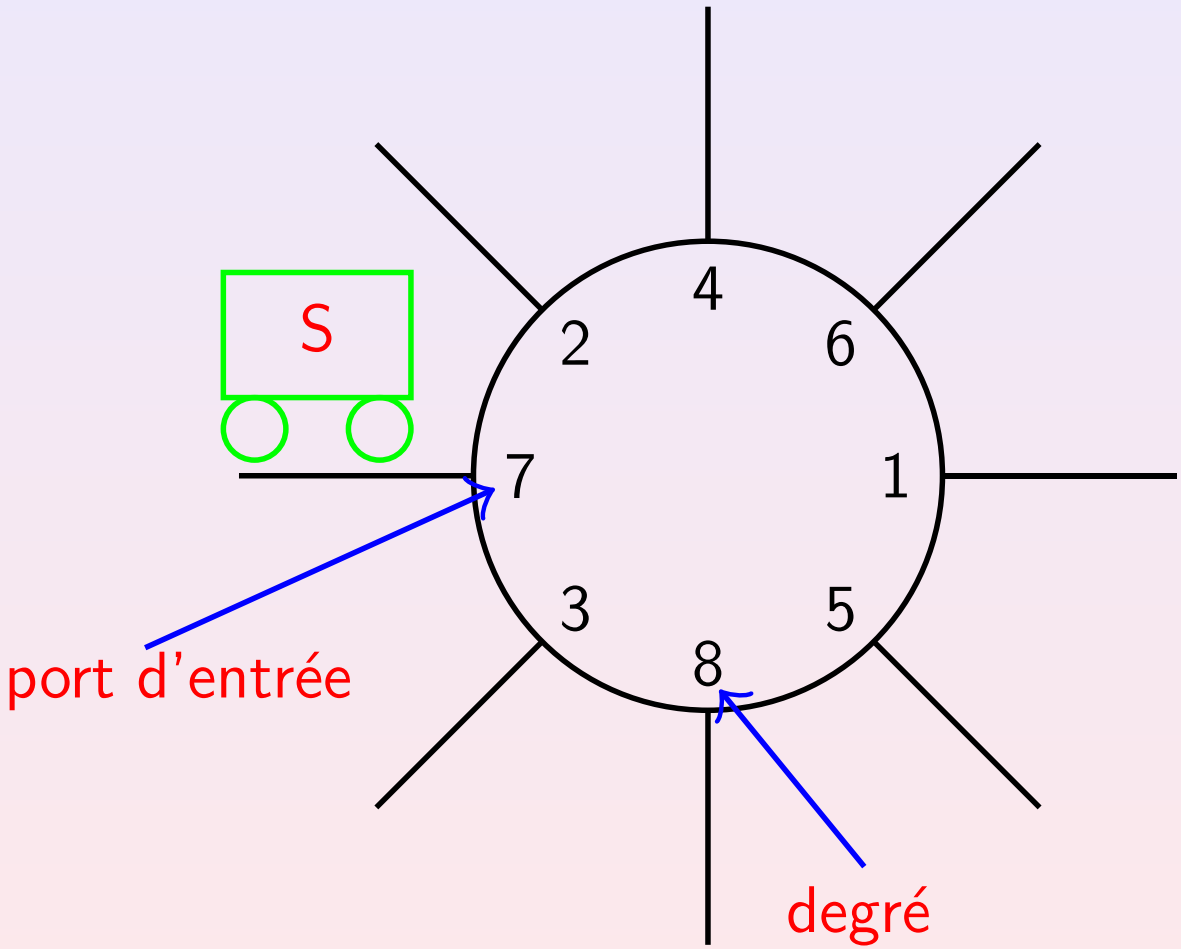
Anonyme :

- sommets sans identifiant
- étiquetage local des arêtes (numéros de port)

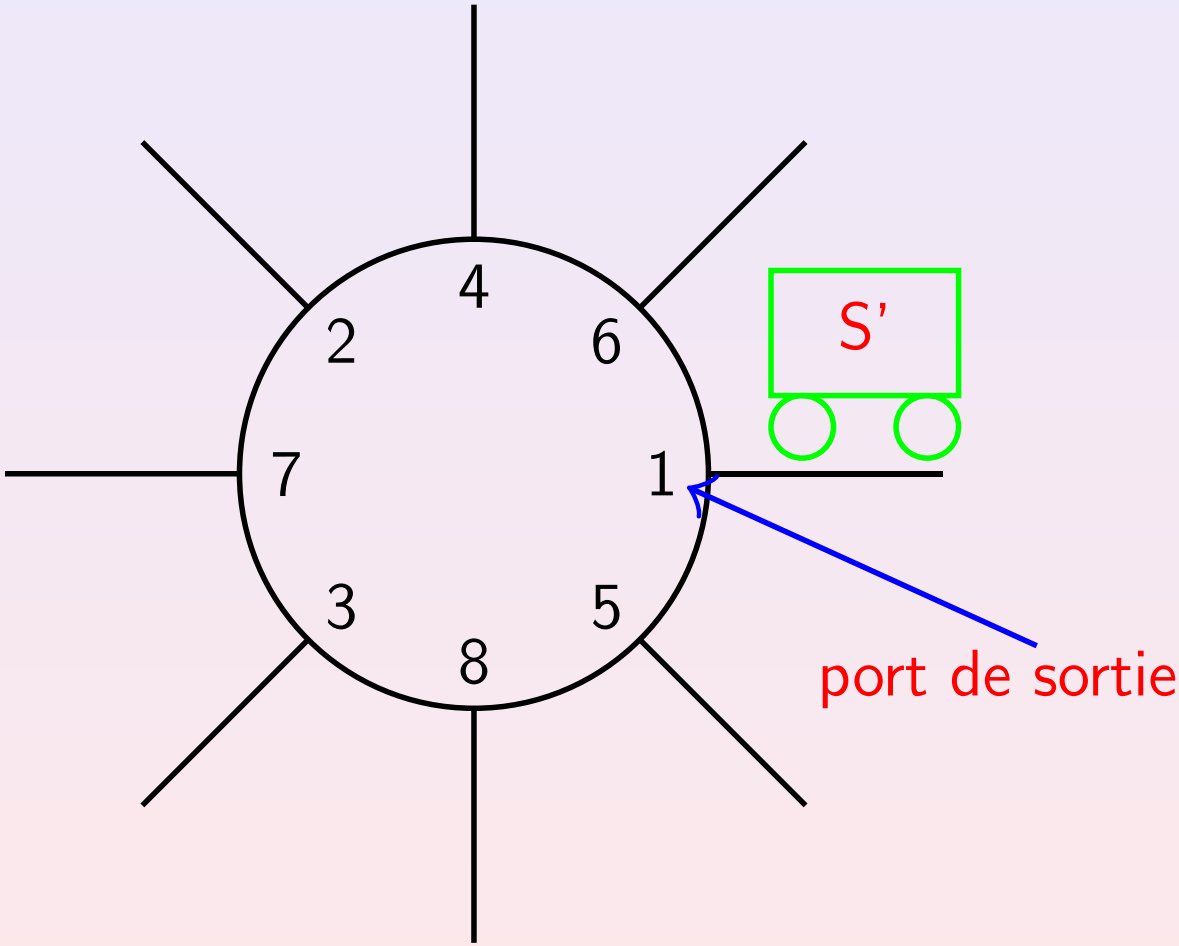
Exemple d'un graphe anonyme



Modèle de l'agent (1)



Modèle de l'agent (1)



Modèle de l'agent (2)

Entrées

- S : état courant
- i : numéro de port d'entrée
- d : degré du sommet

Fonction de transition

$(S', j) = \mu\ (S, i, d)$

Sorties

- S' : nouvel état
- j : numéro de port de sortie

Résultat positif

Théorème

Il existe un agent capable de résoudre le problème d'exploration avec terminaison s'il connaît une borne supérieure $\hat{n}$ sur la taille n du graphe à explorer.

Preuve

Explorer tous les chemins de longueur $\hat{n}$ partant du sommet de départ puis s'arrêter.

Corollaire

La connaissance d'une borne supérieure sur n est suffisante pour résoudre l'exploration avec terminaison.

Cette connaissance est-elle nécessaire ?

Résultat positif

Théorème

Il existe un agent capable de résoudre le problème d'exploration avec terminaison s'il connaît une borne supérieure $\hat{n}$ sur la taille n du graphe à explorer.

Preuve

Explorer tous les chemins de longueur $\hat{n}$ partant du sommet de départ puis s'arrêter.

Corollaire

La connaissance d'une borne supérieure sur n est suffisante pour résoudre l'exploration avec terminaison.

Cette connaissance est-elle nécessaire ?

Résultat positif

Théorème

Il existe un agent capable de résoudre le problème d'exploration avec terminaison s'il connaît une borne supérieure $\hat{n}$ sur la taille n du graphe à explorer.

Preuve

Explorer tous les chemins de longueur $\hat{n}$ partant du sommet de départ puis s'arrêter.

Corollaire

La connaissance d'une borne supérieure sur n est suffisante pour résoudre l'exploration avec terminaison.

Cette connaissance est-elle nécessaire ?

Résultat positif

Théorème

Il existe un agent capable de résoudre le problème d'exploration avec terminaison s'il connaît une borne supérieure $\hat{n}$ sur la taille n du graphe à explorer.

Preuve

Explorer tous les chemins de longueur $\hat{n}$ partant du sommet de départ puis s'arrêter.

Corollaire

La connaissance d'une borne supérieure sur n est suffisante pour résoudre l'exploration avec terminaison.

Cette connaissance est-elle nécessaire ?

Résultat négatif

Théorème

La connaissance d'une borne supérieure sur n est nécessaire pour résoudre l'exploration avec terminaison.

Preuve

- Supposons qu'il existe un agent explorant sans connaissance d'une borne supérieure sur n.
- Agent sur un triangle : arrêt au temps k
- Agent sur cycle C_{2k} : arrêt avant l'exploration

Résultat négatif

Théorème

La connaissance d'une borne supérieure sur n est nécessaire pour résoudre l'exploration avec terminaison.

Preuve

- Supposons qu'il existe un agent explorant sans connaissance d'une borne supérieure sur n.
- Agent sur un triangle : arrêt au temps k
- Agent sur cycle C_{2k} : arrêt avant l'exploration

Résultat négatif

Théorème

La connaissance d'une borne supérieure sur n est nécessaire pour résoudre l'exploration avec terminaison.

Preuve

- Supposons qu'il existe un agent explorant sans connaissance d'une borne supérieure sur n.
- Agent sur un triangle : arrêt au temps k
- Agent sur cycle C_{2k} : arrêt avant l'exploration

Êtes-vous convaincu ?

Résultat négatif

Théorème

La connaissance d'une borne supérieure sur n est nécessaire pour résoudre l'exploration avec terminaison.

Preuve

- Supposons qu'il existe un agent explorant sans connaissance d'une borne supérieure sur n.
- Agent sur un triangle : arrêt au temps k
- Agent sur cycle C_{2k} : arrêt avant l'exploration

Êtes-vous convaincu ?
Est-ce une preuve satisfaisante ?

Résultat négatif

Théorème

La connaissance d'une borne supérieure sur n est nécessaire pour résoudre l'exploration avec terminaison.

Preuve

- Supposons qu'il existe un agent explorant sans connaissance d'une borne supérieure sur n.
- Agent sur un triangle : arrêt au temps k
- Agent sur cycle C_{2k} : arrêt avant l'exploration

Êtes-vous convaincu ?
Est-ce une preuve satisfaisante ? Non : parité de n.

Tentative de formalisation

Information a priori / conseil

- L'agent doit explorer le graphe G.
- Au début de l'exécution de l'algorithme, l'agent reçoit un conseil (connaissance a priori) d'un oracle $\mathcal{O}$ sous la forme d'une chaîne binaire $\mathcal{O}(G)$.

$\mathcal{O}$ induit une partition $(F_0, F_1, \cdots)$ de la famille de graphes $\mathcal{G}$: $F_i = \{G \in \mathcal{G} | \mathcal{O}(G) = i\}$

Connaître une borne supérieure sur n

$$\forall i \; \exists \hat{n}_i \; \forall G \in F_i \; : \; n(G) \leq \hat{n}_i$$

Tentative de formalisation

Information a priori / conseil

- L'agent doit explorer le graphe G.
- Au début de l'exécution de l'algorithme, l'agent reçoit un conseil (connaissance a priori) d'un oracle $\mathcal{O}$ sous la forme d'une chaîne binaire $\mathcal{O}(G)$.

$\mathcal{O}$ induit une partition $(F_0, F_1, \cdots)$ de la famille de graphes $\mathcal{G}$: $F_i = \{G \in \mathcal{G} | \mathcal{O}(G) = i\}$

Connaître une borne supérieure sur n

$$\forall i \; \exists \hat{n}_i \; \forall G \in F_i \; : \; n(G) \leq \hat{n}_i$$

Tentative de formalisation

Information a priori / conseil

- L'agent doit explorer le graphe G.
- Au début de l'exécution de l'algorithme, l'agent reçoit un conseil (connaissance a priori) d'un oracle $\mathcal{O}$ sous la forme d'une chaîne binaire $\mathcal{O}(G)$.

$\mathcal{O}$ induit une partition $(F_0, F_1, \cdots)$ de la famille de graphes $\mathcal{G}$: $F_i = \{G \in \mathcal{G} | \mathcal{O}(G) = i\}$

Connaître une borne supérieure sur n

$$\forall i \ \exists \hat{n}_i \ \forall G \in F_i \quad n(G) \leq \hat{n}_i$$

Résultat négatif (bis)

Théorème

Un agent sans connaissance d'une borne supérieure sur la taille ne peut pas explorer tous les cycles.

(Rappel : conn. borne supérieure $\forall i\ \exists \hat{n}_i\ \forall G \in F_i \quad n(G) \leq \hat{n}_i$)

Preuve

- Supposons qu'il existe un agent explorant sans connaissance d'une borne supérieure sur n.
- $\exists i\ \forall N\ \exists G_N^{(i)} \in F_i \quad n(G_N^{(i)}) > N$
- Agent sur $G_1^{(i)}$: arrêt au temps k
- Agent sur $G_k^{(i)}$: arrêt avant l'exploration

Résultat négatif (bis)

Théorème

Un agent sans connaissance d'une borne supérieure sur la taille ne peut pas explorer tous les cycles.

(Rappel : conn. borne supérieure $\forall i\ \exists \hat{n}_i\ \forall G \in F_i \quad n(G) \leq \hat{n}_i$)

Preuve

- Supposons qu'il existe un agent explorant sans connaissance d'une borne supérieure sur n.
- $\exists i\ \forall N\ \exists G_N^{(i)} \in F_i \quad n(G_N^{(i)}) > N$
- Agent sur $G_1^{(i)}$: arrêt au temps k
- Agent sur $G_k^{(i)}$: arrêt avant l'exploration

Fin de l'histoire ?

Ensemble des cycles $\subset$ ensemble des graphes

Corollaire

La connaissance d'une borne supérieure sur la taille est également nécessaire pour explorer tous les graphes.

Fin de l'histoire ?

Ensemble des cycles $\subset$ ensemble des graphes

Corollaire

La connaissance d'une borne supérieure sur la taille est également nécessaire pour explorer tous les graphes.

FAUX !

Pas de monotonie...

$\mathcal{O}(G) = 0$ si G est un chemin et $\mathcal{O}(G) = n(G)$ sinon

Comparaison entre oracles/conseils

Idée : s'abstraire des infos que l'agent peut calculer seul

Définition : $\mathcal{O} \succeq \mathcal{O}'$

Il existe un algorithme d'agent mobile $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{O} + \mathcal{A}$ peut simuler la sortie de $\mathcal{O}'$.

Théorème (nouvel essai)

Pour tout $\mathcal{O}$ permettant de résoudre l'exploration dans tous les graphes, il existe $\mathcal{O}'$ donnant une borne sup, tel que $\mathcal{O} \succeq \mathcal{O}'$.

Preuve

$\mathcal{O}$ et l'algo d'exploration correspondant $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$ donnent une borne supérieure sur la taille de G : le temps de terminaison de $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$.

Comparaison entre oracles/conseils

Idée : s'abstraire des infos que l'agent peut calculer seul

Définition : $\mathcal{O} \succeq \mathcal{O}'$

Il existe un algorithme d'agent mobile $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{O} + \mathcal{A}$ peut simuler la sortie de $\mathcal{O}'$.

Théorème (nouvel essai)

Pour tout $\mathcal{O}$ permettant de résoudre l'exploration dans tous les graphes, il existe $\mathcal{O}'$ donnant une borne sup, tel que $\mathcal{O} \succeq \mathcal{O}'$.

Preuve

$\mathcal{O}$ et l'algo d'exploration correspondant $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$ donnent une borne supérieure sur la taille de G : le temps de terminaison de $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$.

Comparaison entre oracles/conseils

Idée : s'abstraire des infos que l'agent peut calculer seul

Définition : $\mathcal{O} \succeq \mathcal{O}'$

Il existe un algorithme d'agent mobile $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{O} + \mathcal{A}$ peut simuler la sortie de $\mathcal{O}'$.

Théorème (nouvel essai)

Pour tout $\mathcal{O}$ permettant de résoudre l'exploration dans tous les graphes, il existe $\mathcal{O}'$ donnant une borne sup, tel que $\mathcal{O} \succeq \mathcal{O}'$.

Preuve

$\mathcal{O}$ et l'algo d'exploration correspondant $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$ donnent une borne supérieure sur la taille de G : le temps de terminaison de $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}$.

Fin de l'histoire ? (bis)

Corollaire

La classe d'équivalence de tout oracle donnant la connaissance d'une borne supérieure sur n est minimale pour le problème de l'exploration de tous les graphes.

"Problème" 1 : Peut-il y avoir plusieurs classes minimales ?

"Problème" 2

La classe d'équivalence de tout oracle donnant la connaissance d'une borne supérieure sur n est minimale pour le problème de l'exploration de tous les chemins.

Fin de l'histoire ? (bis)

Corollaire

La classe d'équivalence de tout oracle donnant la connaissance d'une borne supérieure sur n est minimale pour le problème de l'exploration de tous les graphes.

"Problème" 1 : Peut-il y avoir plusieurs classes minimales ?

"Problème" 2

La classe d'équivalence de tout oracle donnant la connaissance d'une borne supérieure sur n est minimale pour le problème de l'exploration de tous les chemins.

Fin de l'histoire ? (bis)

Corollaire

La classe d'équivalence de tout oracle donnant la connaissance d'une borne supérieure sur n est minimale pour le problème de l'exploration de tous les graphes.

"Problème" 1 : Peut-il y avoir plusieurs classes minimales ?

"Problème" 2

La classe d'équivalence de tout oracle donnant la connaissance d'une borne supérieure sur n est minimale pour le problème de l'exploration de tous les chemins.

Retour au point de départ

Théorème

L'oracle vide/neutre est strictement plus faible que tout oracle d'exploration pour la famille de tous les graphes.

Preuve

- Agent sur un triangle : arrêt au temps k
- Agent sur cycle C_{2k} : arrêt avant l'exploration

Ne peut-on rien dire de plus ?

Théorème

Tout oracle induisant un nombre fini de parts F_i est strictement plus faible que tout oracle d'exploration pour la famille de tous les graphes.

Retour au point de départ

Théorème

L'oracle vide/neutre est strictement plus faible que tout oracle d'exploration pour la famille de tous les graphes.

Preuve

- Agent sur un triangle : arrêt au temps k
- Agent sur cycle C_{2k} : arrêt avant l'exploration

Ne peut-on rien dire de plus ?

Théorème

Tout oracle induisant un nombre fini de parts F_i est strictement plus faible que tout oracle d'exploration pour la famille de tous les graphes.

Retour au point de départ

Théorème

L'oracle vide/neutre est strictement plus faible que tout oracle d'exploration pour la famille de tous les graphes.

Preuve

- Agent sur un triangle : arrêt au temps k
- Agent sur cycle C_{2k} : arrêt avant l'exploration

Ne peut-on rien dire de plus ?

Théorème

Tout oracle induisant un nombre fini de parts F_i est strictement plus faible que tout oracle d'exploration pour la famille de tous les graphes.

Retour au point de départ

Théorème

L'oracle vide/neutre est strictement plus faible que tout oracle d'exploration pour la famille de tous les graphes.

Preuve

- Agent sur un triangle : arrêt au temps k
- Agent sur cycle C_{2k} : arrêt avant l'exploration

Ne peut-on rien dire de plus ?

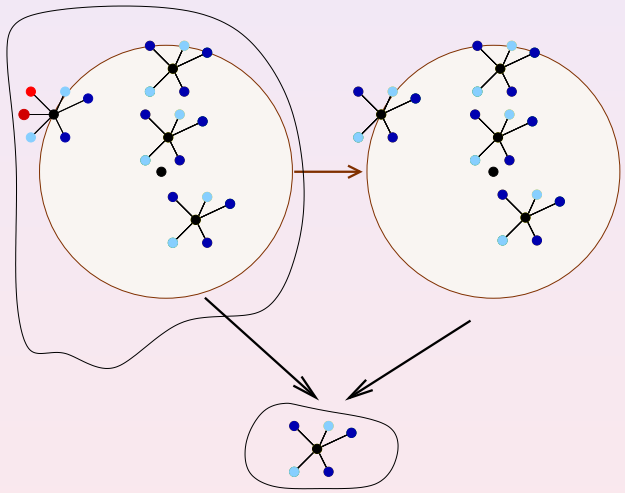
Théorème

Tout oracle induisant un nombre fini de parts F_i est strictement plus faible que tout oracle d'exploration pour la famille de tous les graphes.

Caractérisation fine

Définition

Le graphe H est un quasi-revêtement de rayon r du graphe G s'il existe un sommet u de H telle que la boule dans H de centre u et de rayon r est indistinguable de G.



Voir [J. Chalopin, E. Godard and Y. Métivier. Local Terminations and Distributed Computability in Anonymous Networks. Distributed Computing 2008]

Caractérisation fine

Définition

Le graphe H est un quasi-revêtement de rayon r du graphe G s'il existe un sommet u de H telle que la boule dans H de centre u et de rayon r est indistinguable de G.

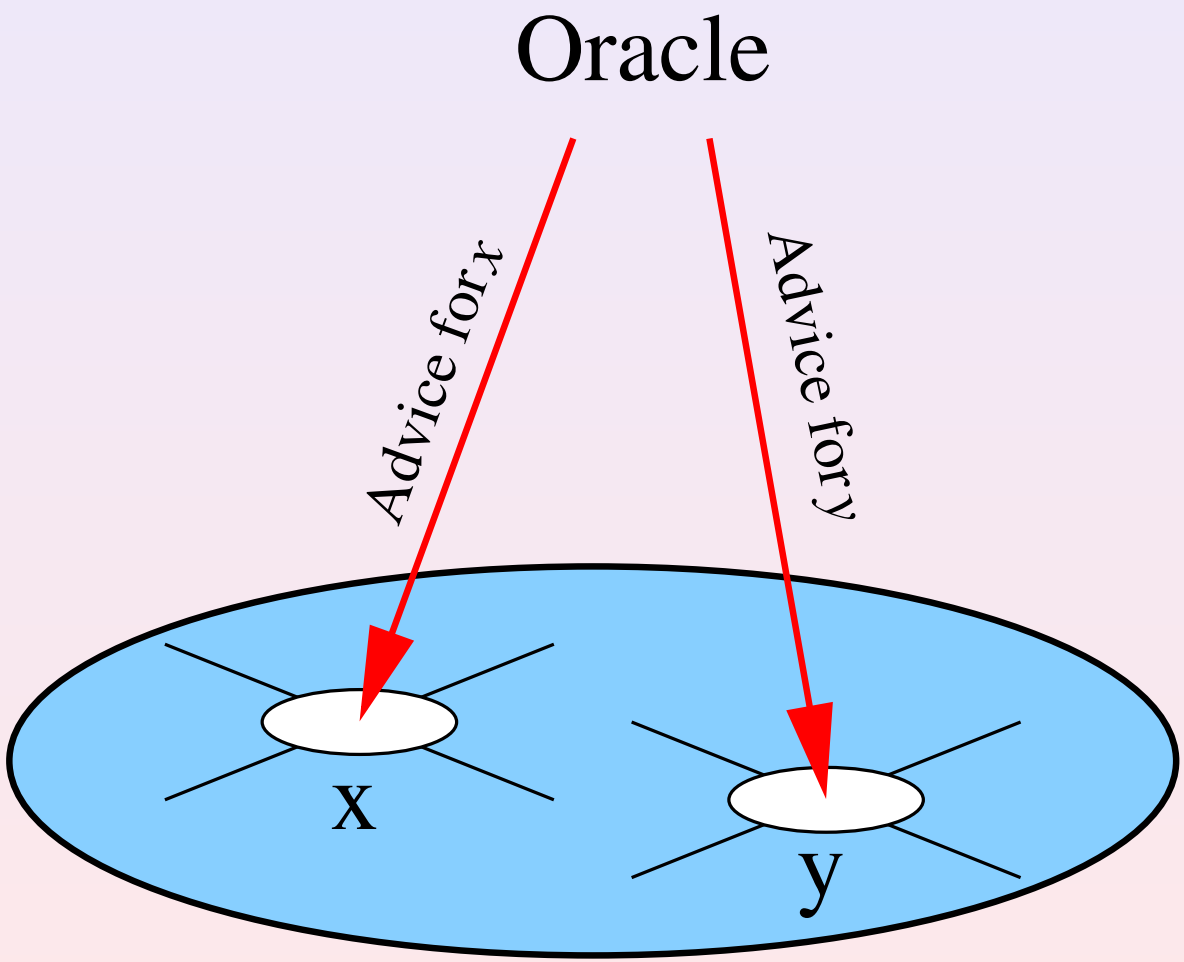
Caractérisation

Un oracle permet de résoudre l'exploration dans une famille $\mathcal{F}$ si et seulement si il n'existe aucune part F_i de $\mathcal{F}$ comprenant des quasi-revêtements de rayon non-borné d'un même graphe $G \in F_i$.

Voir [J. Chalopin, E. Godard and Y. Métivier. Local Terminations and Distributed Computability in Anonymous Networks. Distributed Computing 2008]

Connaissance globale donnée par un oracle

Cadre général en algorithmique distribuée :



Algorithmique distribuée avec conseil

Conception de deux éléments

l'oracle $\mathcal{O}$

- prend la totalité du graphe G en entrée
- fournit un conseil $\mathcal{O}(G, x)$ à chaque sommet (ou agent) x

l'algorithme $\mathcal{A}$

- exécuté localement par chaque sommet (ou agent)
- utilise les conseils donnés par l'oracle

Approches qualitative et quantitative

Inconvénient de l'approche qualitative

Difficile de comparer

- Algorithme connaissant n
- Algorithme connaissant D
- Algorithme connaissant le voisinage

Approche quantitative

Quelle est la taille minimum d'un oracle permettant de résoudre un problème $\mathcal{P}$?

Questions quantitatives sur la connaissance nécessaire, indépendamment du type de connaissance fourni.

Approches qualitative et quantitative

Inconvénient de l'approche qualitative

Difficile de comparer

- Algorithme connaissant n
- Algorithme connaissant D
- Algorithme connaissant le voisinage

Approche quantitative

Quelle est la taille minimum d'un oracle permettant de résoudre un problème $\mathcal{P}$?

Questions quantitatives sur la connaissance nécessaire, indépendamment du type de connaissance fourni.

Application au calcul distribué

Deux tâches fondamentales

Dissémination d'un message M d'une source à tous les nœuds d'un réseau.

- Réveil (Wakeup) : un nœud ne peut pas communiquer avant d'avoir reçu le message M
- Diffusion (Broadcast) : un nœud peut communiquer à tout instant

Problème

Résoudre ces tâches en utilisant un nombre de messages linéaire en n

Application au calcul distribué

Deux tâches fondamentales

Dissémination d'un message M d'une source à tous les nœuds d'un réseau.

- Réveil (Wakeup) : un nœud ne peut pas communiquer avant d'avoir reçu le message M
- Diffusion (Broadcast) : un nœud peut communiquer à tout instant

Problème

Résoudre ces tâches en utilisant un nombre de messages linéaire en n

Résultats

[P. Fraigniaud, D. Ilcinkas, and A. Pelc. *Communication algorithms with advice*. JCSS 2010]

Réveil (Wakeup)

La taille minimum d'oracle est $\Theta(n \log n)$ bits.

Diffusion (Broadcast)

La taille minimum d'oracle est $\Theta(n)$ bits.

Permet de distinguer clairement les deux problèmes.

Résultats

[P. Fraigniaud, D. Ilcinkas, and A. Pelc. *Communication algorithms with advice*. JCSS 2010]

Réveil (Wakeup)

La taille minimum d'oracle est $\Theta(n \log n)$ bits.

Diffusion (Broadcast)

La taille minimum d'oracle est $\Theta(n)$ bits.

Permet de distinguer clairement les deux problèmes.

Résultats

[P. Fraigniaud, D. Ilcinkas, and A. Pelc. *Communication algorithms with advice*. JCSS 2010]

Réveil (Wakeup)

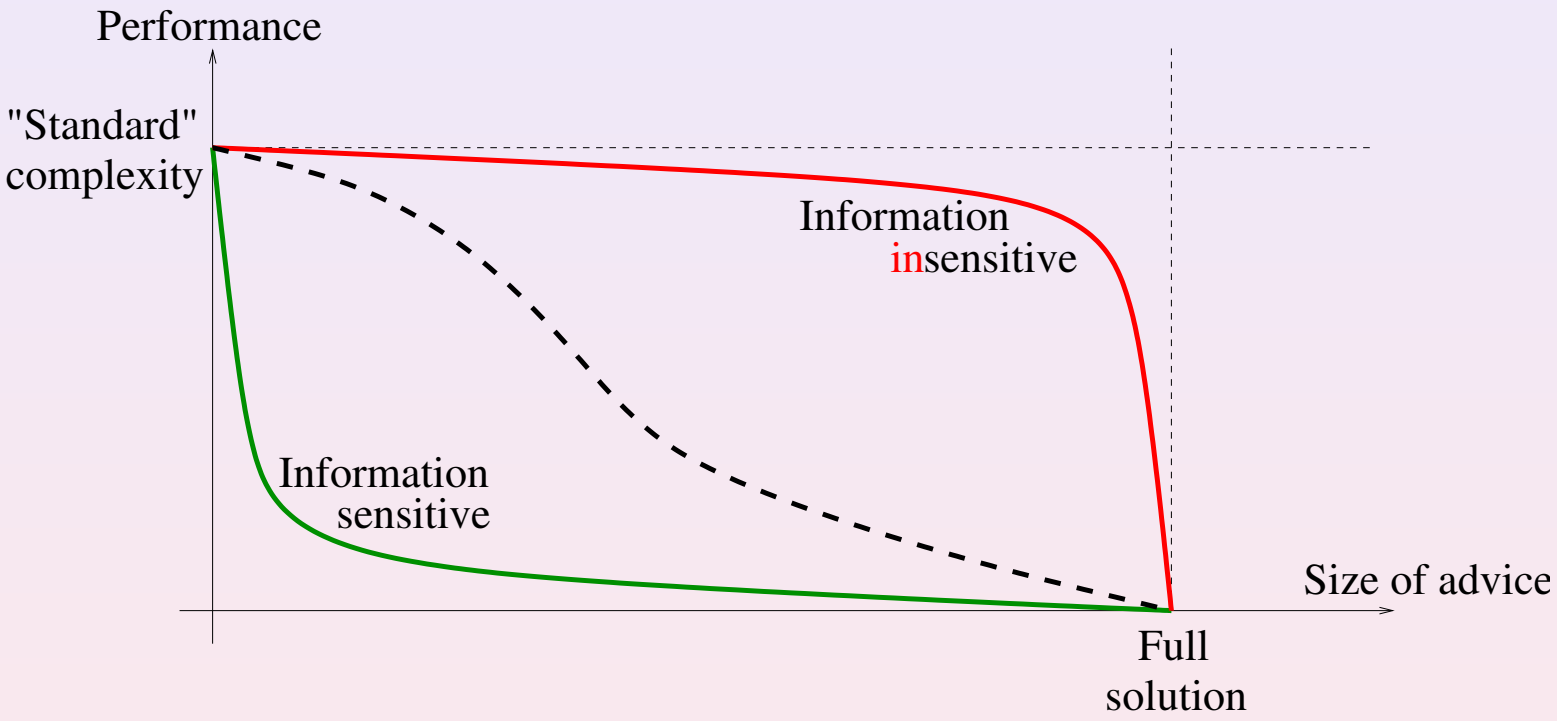
La taille minimum d'oracle est $\Theta(n \log n)$ bits.

Diffusion (Broadcast)

La taille minimum d'oracle est $\Theta(n)$ bits.

Permet de distinguer clairement les deux problèmes.

Autre point de vue possible



Merci
de votre attention