

# Musique computationnelle : Des arabesques de Debussy aux monoïdes quasi-inversifs de Lawson

David Janin,  
Université de Bordeaux  
LaBRI

Séminaire MaMux (30 mars 2012) et LaBRI (12 avril 2012)

La musique est le seul langage qui permette de comprendre plusieurs personnes qui parlent en même temps. . .

Amadeus, XVIIIe siècle,

(d'après M. Forman dans le film éponyme)

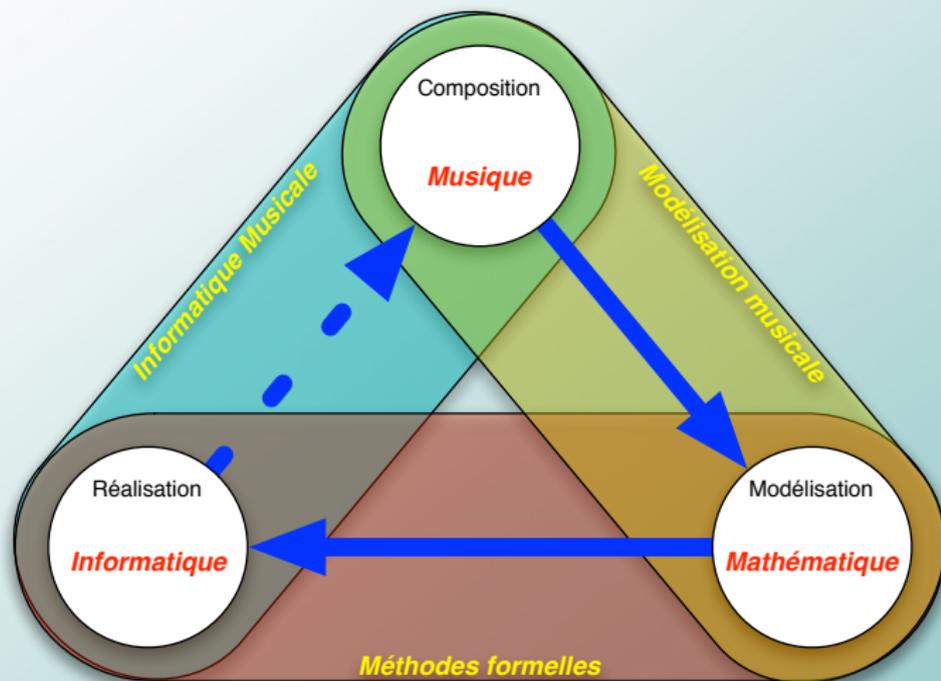
Aujourd'hui, deux siècles plus tard, on a bien compris le multiplexage fréquentiel, temporel, spatiale.

La musique est aussi, depuis des siècles, le langage du temps, de l'espace, du parallélisme, de l'interaction, . . .

La modélisation formelle du langage musical peut-elle nous conduire à de nouvelles *métaphores* ou *paradigmes* utiles à la modélisation des systèmes informatique ?

# Research field :

## Theoretical foundation of computational music



# 1. Arabesques

La structure complexe des arabesques...

## Un exemple initiatique

The image displays two systems of musical notation for the piece 'Arabesques' by Maurice Ravel. The first system consists of a piano (p) part in the lower staff and a violin part in the upper staff. The tempo is marked 'a Tempo'. The key signature is three sharps (F#, C#, G#) and the time signature is 4/4. The piano part features a melodic line with triplets and slurs, while the violin part provides a harmonic accompaniment with sustained notes and moving lines. The second system continues the musical development, showing further interaction between the piano and violin parts.

Extrait des arabesques : *andantino con moto*

Play

The image displays a musical score for Arabesque No. 1 by Frédéric Chopin. The score is written for piano and features a soprano voice line. The tempo is marked "a Tempo". The key signature is three sharps (F#, C#, G#) and the time signature is 4/4. The score is divided into two systems. The first system shows the beginning of the piece, with a piano dynamic marking "p". The second system shows a continuation of the piece, with a key signature change to two sharps (F#, C#) and a time signature change to 4/4. Red boxes highlight specific motifs in the soprano voice line, illustrating a sequence of motifs with interweaves.

une **succession de motifs** avec entrelacs, en voix de soprane

Play

The image displays a musical score for 'Arabesques' in G major (one sharp) and 4/4 time. The tempo is marked 'a Tempo' and the dynamics are 'p' (piano). The score consists of two systems, each with a treble and bass clef staff. The first system shows a melodic line in the treble clef with triplets and a bass line with eighth notes. The second system continues the piece, featuring a prominent melodic line in the treble clef with several measures highlighted by red boxes. A yellow horizontal line is drawn across the treble clef staff in both systems, indicating a specific pitch level. The annotations highlight a 'trame sous-jacente' (underlying structure) in the medium range.

une **trame sous-jacente** dans les médiums,

Play

The image displays a musical score for Arabesque No. 9 by Frédéric Chopin. The score is written in G major and 4/4 time, marked "a Tempo" and "p". It features a treble and bass staff. The bass line is characterized by arpeggiated chords, which are highlighted with green boxes. The treble line contains melodic phrases, some of which are highlighted with red boxes. The score includes trills and triplets in both hands.

des arpeges pour l'harmonie,

Play

The image displays two systems of musical notation for Chopin's Arabesque No. 1. The first system consists of two staves: a treble clef staff with a key signature of three sharps (F#, C#, G#) and a common time signature, and a bass clef staff with the same key signature. The tempo is marked 'a Tempo' and the dynamics 'p'. The second system also consists of two staves, with the top staff in treble clef and the bottom staff in bass clef, both in the same key signature. The music is annotated with colored boxes: red boxes highlight specific melodic phrases in the treble staves, and green boxes highlight corresponding phrases in the bass staves. A blue horizontal line is drawn across the bass staves, and a yellow horizontal line is drawn across the treble staves, likely indicating a specific pitch or interval.

une ligne de basse...

Play

# Quel langage de modélisation ?

## *Un langage pour l'analyse*

*partition*  $\implies$  *structure*  $\implies$  *intention*

## *Un langage pour la composition (ou programmation musicale)*

*partition*  $\longleftarrow$  *structure*  $\longleftarrow$  *intention*

## *Un langage expressif*

doté d'opérateurs de compositions séries, parallèles,  
avec *recouvrements partiels*, et descriptions hiérarchiques. . .

## *Un langage utilisable*

doté de bonnes propriétés informatique telles que la  
*compositionnalité*, la *réutilisabilité*, etc. . .

# Quel langage de modélisation ?

## *Un langage pour l'analyse*

*partition*  $\implies$  *structure*  $\implies$  *intention*

## *Un langage pour la composition (ou programmation musicale)*

*partition*  $\longleftarrow$  *structure*  $\longleftarrow$  *intention*

## *Un langage expressif*

doté d'opérateurs de compositions séries, parallèles,  
avec recouvrements partiels, et descriptions hiérarchiques. . .

## *Un langage utilisable*

doté de bonnes propriétés informatique telles que la  
compositionnalité, la réutilisabilité, etc. . .

# Quel langage de modélisation ?

## *Un langage pour l'analyse*

*partition*  $\implies$  *structure*  $\implies$  *intention*

## *Un langage pour la composition (ou programmation musicale)*

*partition*  $\longleftarrow$  *structure*  $\longleftarrow$  *intention*

## *Un langage expressif*

doté d'opérateurs de compositions séries, parallèles,  
avec recouvrements partiels, et descriptions hiérarchiques...

## *Un langage utilisable*

doté de bonnes propriétés informatique telles que la  
compositionnalité, la réutilisabilité, etc...

# Quel langage de modélisation ?

## *Un langage pour l'analyse*

*partition*  $\implies$  *structure*  $\implies$  *intention*

## *Un langage pour la composition (ou programmation musicale)*

*partition*  $\longleftarrow$  *structure*  $\longleftarrow$  *intention*

## *Un langage expressif*

doté d'opérateurs de compositions **séries**, **parallèles**,  
avec **recouvrements partiels**, et **descriptions hiérarchiques**...

## *Un langage utilisable*

doté de bonnes propriétés informatique telles que la  
compositionnalité, la réutilisabilité, etc. . .

# Quel langage de modélisation ?

## *Un langage pour l'analyse*

*partition*  $\implies$  *structure*  $\implies$  *intention*

## *Un langage pour la composition (ou programmation musicale)*

*partition*  $\longleftarrow$  *structure*  $\longleftarrow$  *intention*

## *Un langage expressif*

doté d'opérateurs de compositions *séries*, *parallèles*,  
avec *recouvrements partiels*, et *descriptions hiérarchiques*...

## *Un langage utilisable*

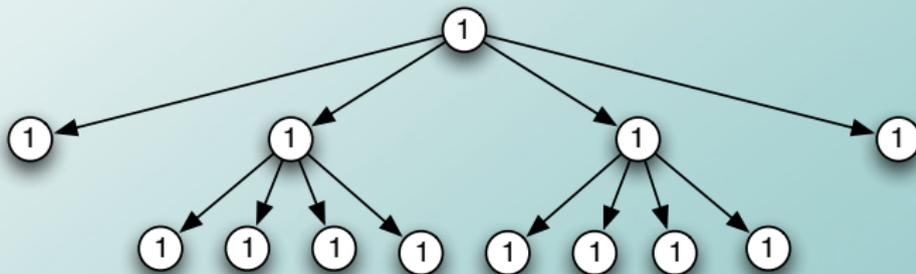
doté de bonnes propriétés informatique telles que la  
*compositionnalité*, la *réutilisabilité*, etc. . .

## Quel modèle pour ce langage ?

Un exemple de modélisation: la (structure rythmique de la) partition



est (typiquement) modélisée à l'aide d'un arbre pondéré par les durées (relatives) de ses sous-arbres :





# Quel modèle ?

Les arbres pondérés ?

pas si sûr...

# Quel modèle ?

Les arbres pondérés ?

pas si sûr...

## 2. Composition Séquentielle

Le problème du Bebop...  
et la solution du Bebop [Jan11]...

# My little blue suede shoes (Ch. Parker)



The image displays two staves of musical notation in G-flat major (two flats) and common time (C). The first staff contains three measures of music, each starting with a motif (a) and followed by a variation (b). The second staff contains two measures of music, each starting with a motif (a) and followed by a variation (b). The motifs (a) are marked with red text and brackets, and the variations (b) are also marked with red text and brackets.

## Analyse

Trois expositions d'un même motif (a) suivi d'une variation conclusive (b).

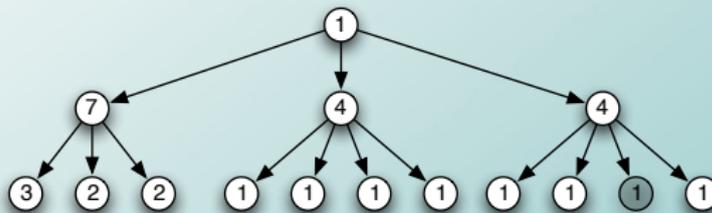
Play



## Modélisation des motifs (b)

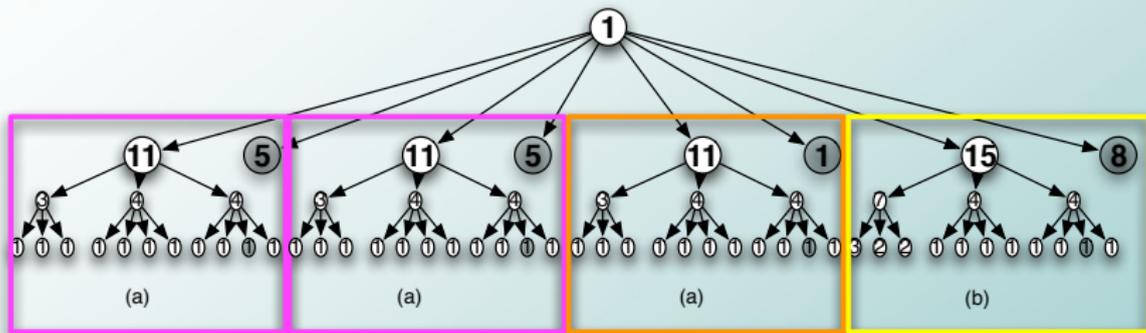


modélisé par:



(b)

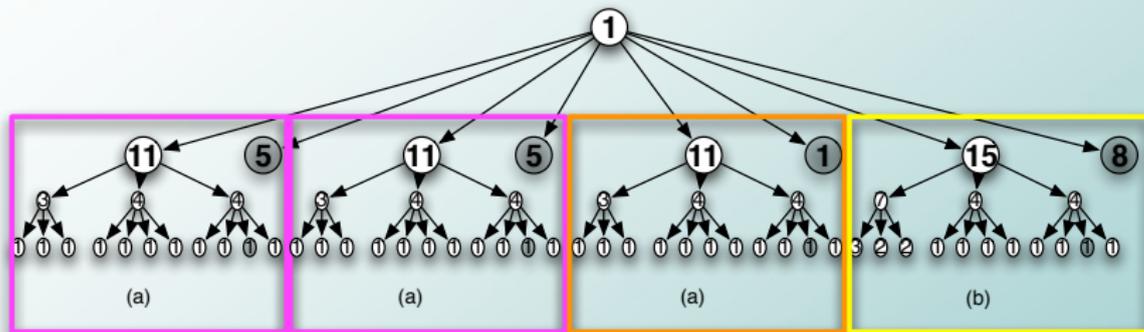
# Modélisation résultante



Défauts de cette modélisation:

- insertion de silences de longueurs variables,
- structuration logique ( $3 \times (a) + (b)$ ) perdue.

# Modélisation résultante



Défauts de cette modélisation:

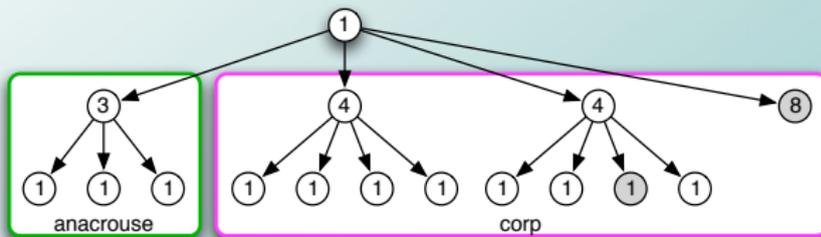
- insertion de silences de longueurs variables,
- structuration logique ( $3 \times (a) + (b)$ ) perdue.

## Autre approche

Expliciter l'anticipation du premier temps (anacrouse) :



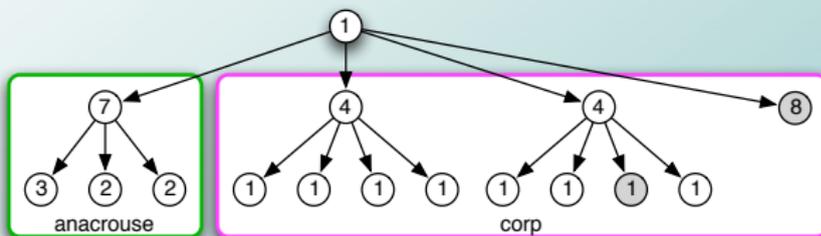
et la synchronisation implicite jusqu'à la fin de la seconde mesure :



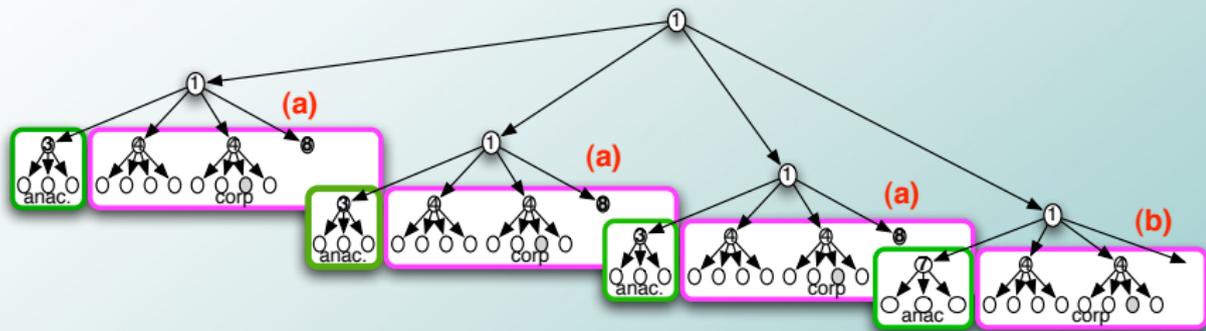
idem pour le deuxième motif le deuxième motif :



ce qui donne:



avec la *composition séquentielle* résultante:



définit avec *superpositions locales* des anacrouses avec les corps des motifs qui précèdent.

On retrouve ici notre structure logique :  $3 \times (a) + (b)$  !

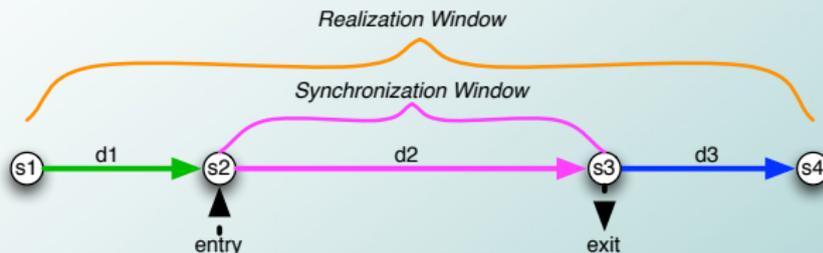
## 3. Formalisation

Une structuration algébrique du temps...

# Fenêtres de synchronisation vs fenêtres de réalisation

## Principe [Jan11]

Distinguer pour chaque motif musical:



## Idée ancienne

Implicitement présente en modélisation musicale dans LOCO [DH88], mais aussi en productique ou en système d'exploitation.

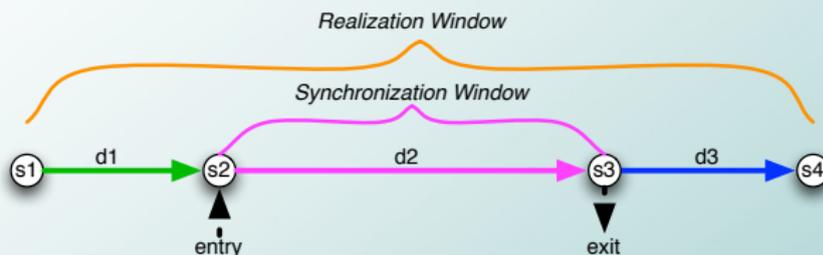
## Remarque

En théorie de la musique : cette distinction semble modéliser et généraliser la notion d'*appui* (idée à développer ?).

# Fenêtres de synchronisation vs fenêtres de réalisation

## Principe [Jan11]

Distinguer pour chaque motif musical:



## Idée ancienne

Implicitement présente en modélisation musicale dans LOCO [DH88], mais aussi en **productique** ou en **système d'exploitation**.

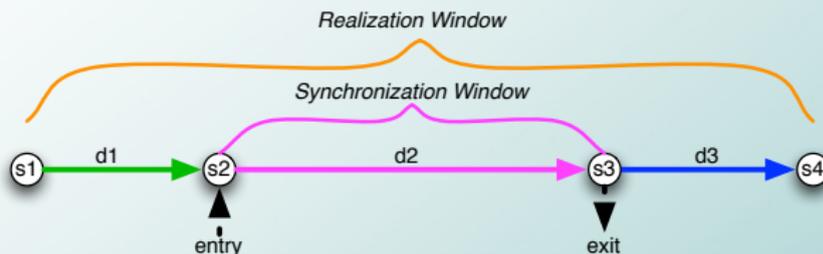
## Remarque

En théorie de la musique : cette distinction semble modéliser et généraliser la notion d'*appuis* (idée à développer ?).

# Fenêtres de synchronisation vs fenêtres de réalisation

## Principe [Jan11]

Distinguer pour chaque motif musical:



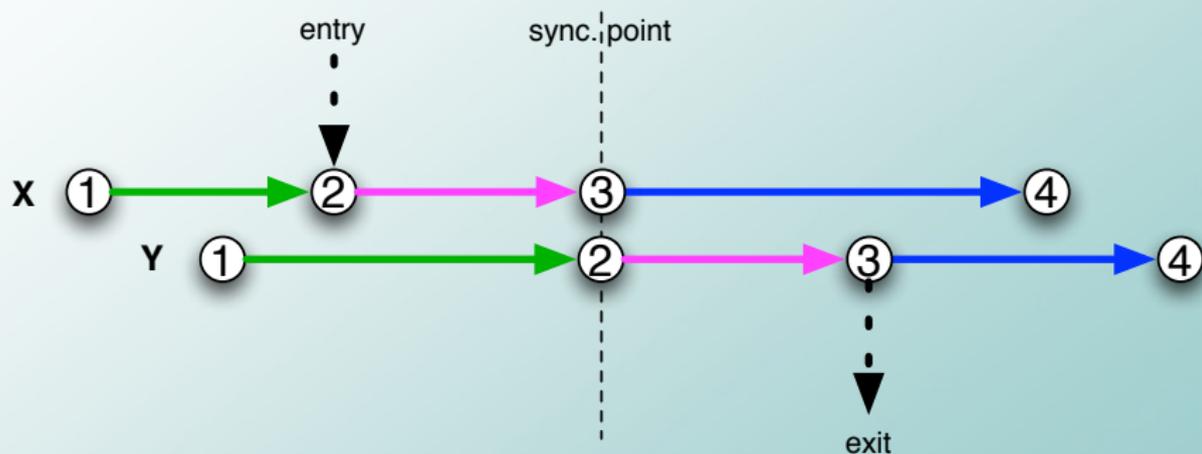
## Idée ancienne

Implicitement présente en modélisation musicale dans LOCO [DH88], mais aussi en **productique** ou en **système d'exploitation**.

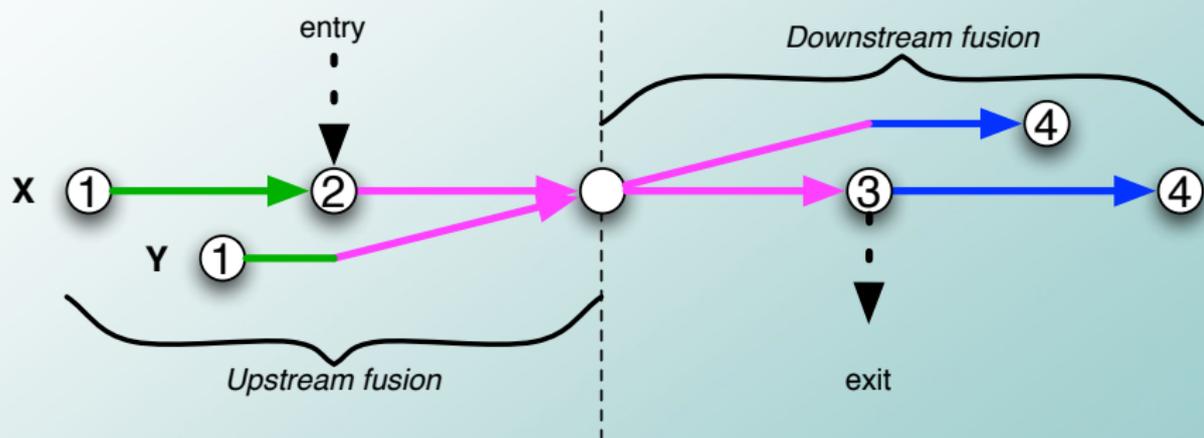
## Remarque

En théorie de la musique : cette distinction semble modéliser et généraliser la notion d'*appuis* (idée à développer ?).

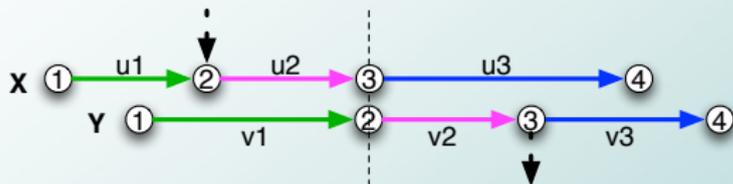
# Produit séquentiel : 1. synchronisation



## Produit séquentiel : 2. fusion



## Algèbre induite : le cas discret



Triplets de mots :  $T_A = 0 + A^* \times A^* \times A^*$  équipé du produit:

$$\underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_X \cdot \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_Y = \underbrace{((u_1 u_2 \vee_s v_1) u_2^{-1}, u_2 v_2, v_2^{-1} (u_3 \vee_p v_2 v_3))}_{X.Y}$$

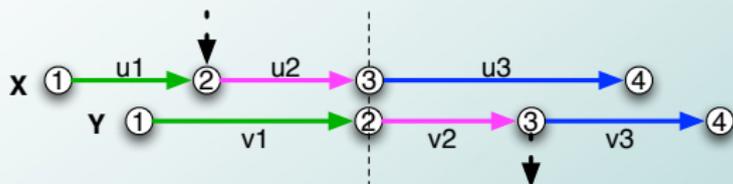
avec fusion définit par **unification lettre à lettre** (0 si incompatible)

avec  $u \vee_s v = \min_s \{w \in A^* : u \leq_s w, v \leq_s w\}$  et

$u \vee_p v = \min_p \{w \in A^* : u \leq_p w, v \leq_p w\}$ .

Exemple :  $(b, c, de).(abc, d, ef) = (ab, cd, ef)$ .

# Algèbre induite : le cas continu



Triplets de durées :  $D_A = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , équipé du produit:

$$\underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_X \cdot \underbrace{(y_1, y_2, y_3)}_Y = \underbrace{(\max(x_1, y_1 - x_2), x_2 + y_2, \max(y_3, x_3 - y_2))}_{X.Y}$$

avec fusion défini sur les motifs audio sous-jacents par **mixage et crossfading**.

# Structure algébrique résultante

## Théoreme

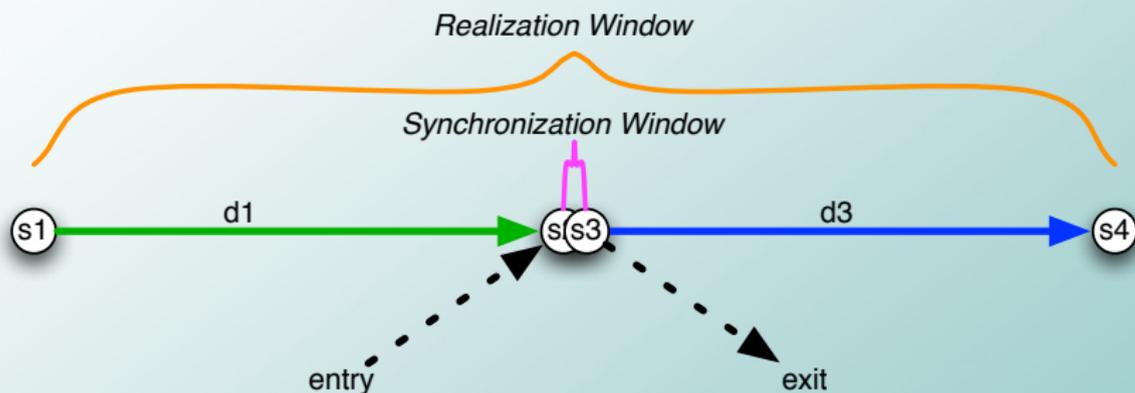
Dans tous les cas, on obtient des **monoïdes**, i.e. des ensembles équipés d'un **produit associatif** avec un **élément neutre**.

## 4. Monoïde quasi-inversif

Une structure algébrique particulièrement riche...

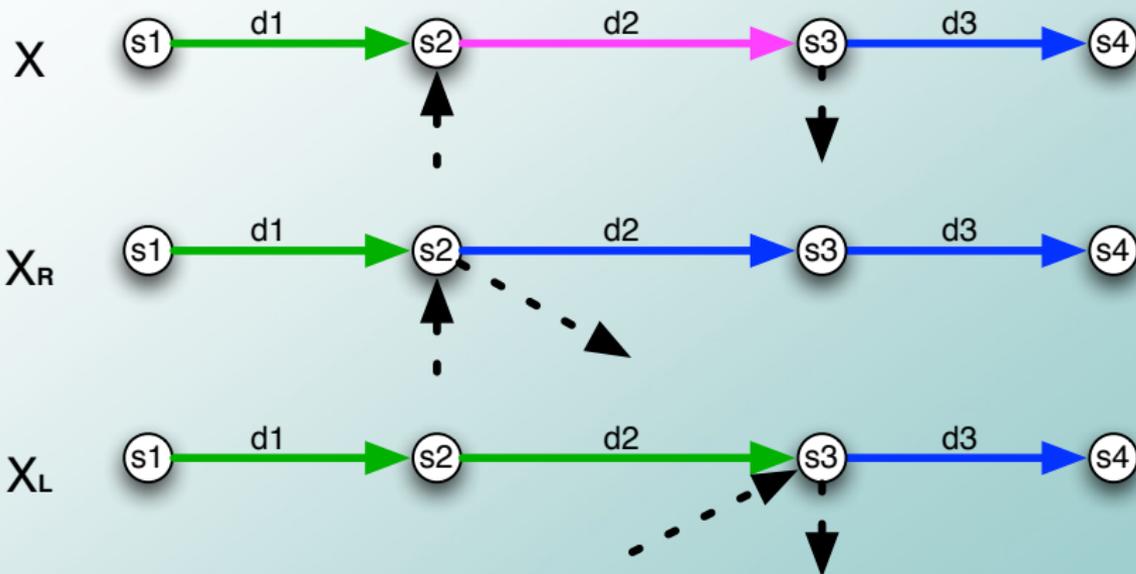
# Les motifs contextuels

Lorsqu'entrée et sortie coïncident, on obtient des **contextes**



## Contextes droits et gauches d'un élément

Chaque élément est **structurellement** associé à un **contexte droit** et un **contexte gauche**:



# Propriétés des contextes

## Lemma

Pour tout motif  $X$  et  $Y$ :

- (0)  $(X_L)_R = (X_L)_L = X_L$  et  $(Y_R)_R = (Y_R)_L = Y_R$  (*projection*),
- (1)  $X_L X_L = X_L$  et  $Y_R Y_R = Y_R$  (*idempotence*),
- (2)  $X_L Y_L = Y_L X_L$  et  $X_R Y_R = Y_R X_R$  (*commutation*),
- (3)  $X_R X = X X_L = X$  (*neutralité locale*).

# Ordre naturel sur les motifs

## Definition

$X \leq Y$  lorsque  $\text{sync}(X) = \text{sync}(Y)$  et  $\text{real}(X) \supseteq \text{real}(Y)$ .

## Lemma

Pour tout  $X$  et  $Y$  on a équivalence de :

- $X \leq Y$ ,
- $X = X_R Y X_L$ ,
- $X = E Y F$  pour  $E$  et  $F$  deux contextes.

*i.e. version bi-lateral de l'ordre naturel de Nambooripad [Nam80].*

# Syntaxe vs sémantique

Les contextes droits et gauches ont aussi une définition **sémantique**;

## Lemma

Pour tout élément  $X$ ,

$$(1) X_L = \min\{E \leq 1 : XE = X\} \text{ (stab. droit canonique),}$$

$$(2) X_R = \min\{E \leq 1 : EX = X\} \text{ (stab. gauche canonique).}$$

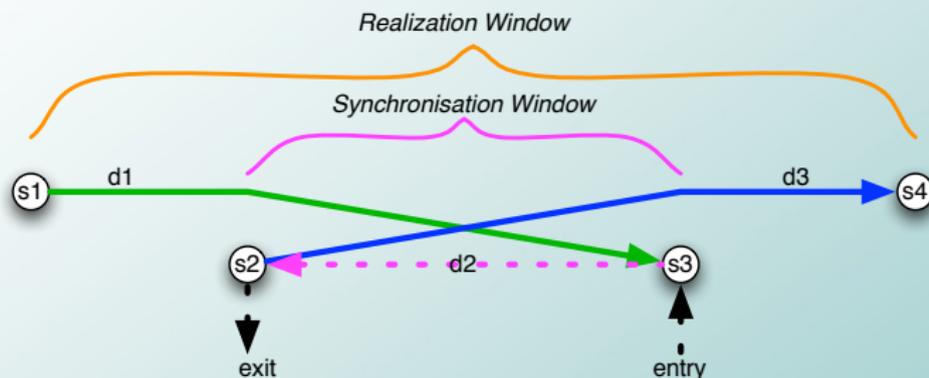
En particulier, l'ensemble des contextes peut-être redéfinit par  $U = \{X : X \leq 1\}$  l'ensemble des **sous-unités**.

## Remarque

Ces structures (sans neutre) existent déjà dans la théorie des semigroupes inversifs [Law98] : c'est les semigroupes  **$U$ -semiadéquat** de Lawson [Law91] appelé ici quasi-inverses.

## Motif inverse

On peut aussi définir (sens (musical ?) des motifs avec synchronisation négative (inverse) :



### Lemma

Pour tout motif  $X$  il existe un **unique** motif  $X^{-1}$  tel que

$$XX^{-1}X = X \text{ et } X^{-1}XX^{-1} = X^{-1}$$

avec  $X_L = X^{-1}X$  et  $X_R = XX^{-1}$ , i.e. c'est un **monoïde inversif**.

## 5. Langages

Où on est amené à revisiter la théorie algébrique des langages

## Classes de langages classiques

### Definition

Pour tout langage  $L \subseteq T_A = 0 + A^* \times A^* \times A^*$  on a:

- $L$  est **REC** lorsque  $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$  pour  $\varphi : T_A \rightarrow S$  morphisme de monoïde et  $S$  fini,
- $L$  est **RAT<sub>R</sub>** ou **RAT<sub>C</sub>** lorsque  $L$  est définissable à l'aide d'ensemble fini, somme, produit, étoile et (R) opérateurs de résidus ou (C) opérateurs de contexte,
- $L$  est **MSO** lorsque  $L$  est définissable à l'aide d'une formule de logique monadique du second ordre.

Theorem ([Jan12a])

$$REC \subset RAT_R \stackrel{C?}{\subseteq} RAT_S = MSO$$

## Classes de langages classiques

### Definition

Pour tout langage  $L \subseteq T_A = 0 + A^* \times A^* \times A^*$  on a:

- $L$  est **REC** lorsque  $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$  pour  $\varphi : T_A \rightarrow S$  morphisme de monoïde et  $S$  fini,
- $L$  est **RAT<sub>R</sub>** ou **RAT<sub>C</sub>** lorsque  $L$  est définissable à l'aide d'ensemble fini, somme, produit, étoile et (R) opérateurs de résidus ou (C) opérateurs de contexte,
- $L$  est **MSO** lorsque  $L$  est définissable à l'aide d'une formule de logique monadique du second ordre.

Theorem ([Jan12a])

$$REC \subset RAT_R \stackrel{C?}{\subseteq} RAT_S = MSO$$

# Langages de tuiles vs langages de mots

## Theorem ([Jan12a])

Un langage  $L \subseteq T_A$  est MSO définissable si et seulement si

$$L = \sum_{i \in I} (L_i \times C_i \times R_i)$$

pour  $I$  fini, et pour tout  $i \in I$ ,  $L_i$ ,  $C_i$  et  $R_i \subseteq A^*$  rationnels.

## Remarque

La classe des langages définissables en MSO est donc simple (théorème ci dessus) et robuste (théorème précédent).

## Remédier à l'effondrement de REC

### Definition ([MR77])

$\varphi : (M, \leq) \rightarrow (N, \leq)$  est un **pré-morphisme** lorsque  $\varphi$  est **croissante**, et pour tout  $x$  et  $y \in M$ ,  $\varphi(xy) \leq \varphi(x)\varphi(y)$  (au lieu de  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$  pour les morphismes).

### Definition ([Jan12c])

Un langage  $L \subseteq M$  est **quasi-reconnaissable** lorsque  $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$  pour un **premorphisme**  $\varphi : M \rightarrow N$  avec  $N$  fini.

# Résultat encourageant

Theorem ([Jan12c])

*Dans les cas raisonnables,  $QREC = MSO$ .*

## Quasi-reconnaissabilité vs reconnaissabilité

### Lemma ([Jan12b])

Il existe une transformation naturelle  $Q$  telle que, pour tout morphisme  $\varphi : A^* \rightarrow S$ , il existe des premorphismes surjectifs  $\sigma_A : Q(A^*) \rightarrow A^*$  et  $\sigma_S : Q(S) \rightarrow S$  tels que le diagramme suivant commute:

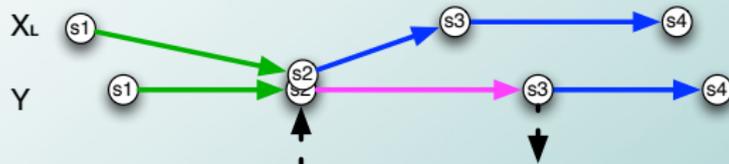
$$\begin{array}{ccc} T_A \subseteq Q(A^*) & \xrightarrow{Q(\varphi)} & Q(S) \\ \sigma_A \downarrow & & \downarrow \sigma_S \\ A^* & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

## 6. Applications

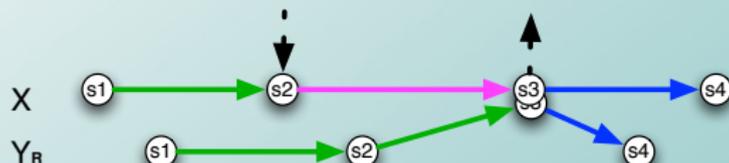
Amadeus II : the return...

# Un parallélisme partiel : fork and join

- Démarrer deux motifs  $X$  et  $Y$  en même temps :  $X_L Y$ ,

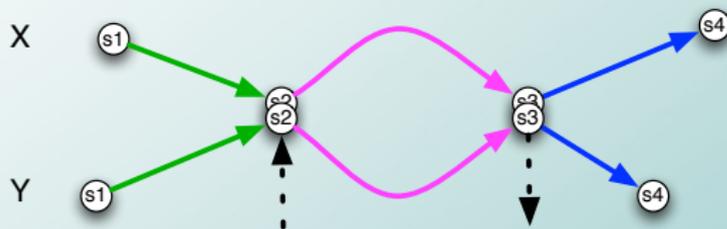


- Finir deux motifs  $X$  et  $Y$  en même temps :  $XY_R$ .



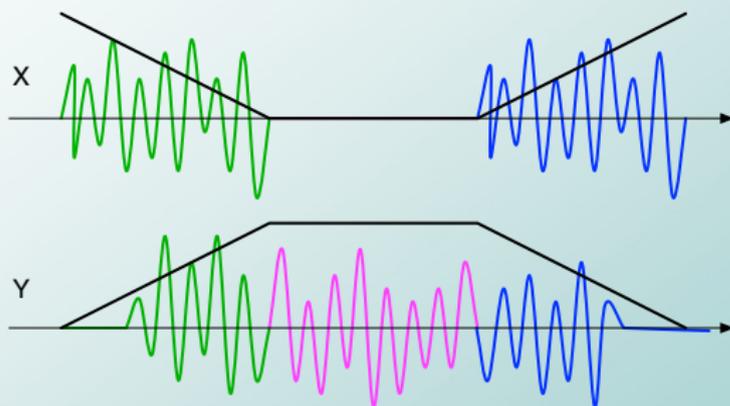
# Composition parallèle

## Nouvel opérateur



avec time-stretching pour ajuster les fenêtres de synchronisation.

# Application à la reconstruction audio



# Resynchronization

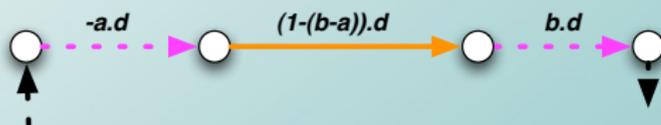
A partir d'un motif simple, déplacement des points de synchro:



Expansion : par offset à gauche  $a < 0$  et à droite  $b > 0$ :

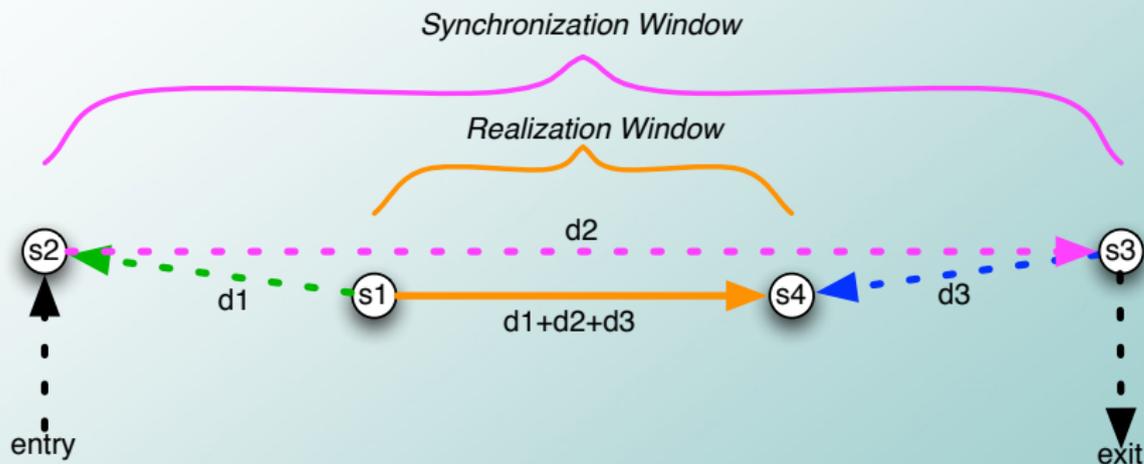


Contraction : par offset à droite  $a > 0$  et à droite  $b < 0$ :

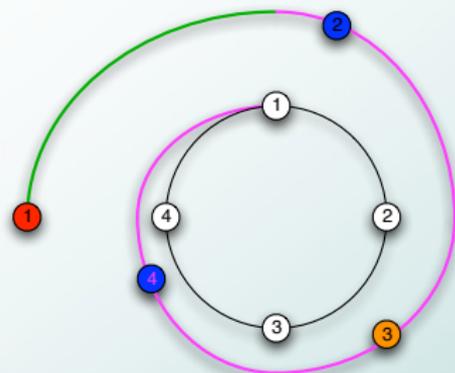


# Extension du modèle de motifs

Après contraction, la synchronisation englobe la réalisation :

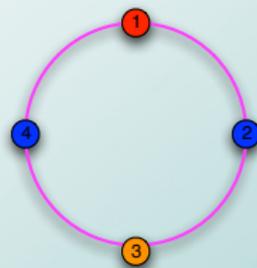


# Application au live looping

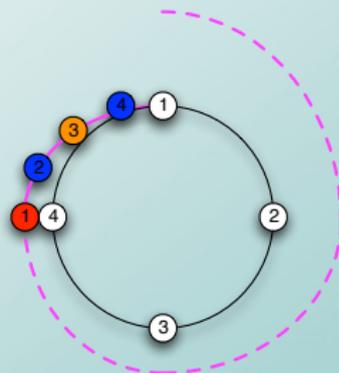


Expansion gauche (anticipation)

Play



Play



Contraction gauche (retard)

Play

Exemples rythmiques d'expansions et de contractions gauches...

## 7. Conclusion

Des opérateurs de compositions prometteurs en musique, en algèbre et en informatique,

- Informatique : alternative aux algèbres de processus ?
- Informatique : langages de tuilages temporisés ?
- Algèbre : théorie algébrique des langages d'arbres ?
- Musique : modélisation musicale ? interprétation musicale ?

Un sujet de thèse **INEDIT** à pourvoir à la rentrée 2012 !

En vous remerciant de votre attention !



P. Desain and H. Honing.

Loco: a composition microworld in logo.

*Computer Music Journal*, 12(3):30–42, 1988.



David Janin.

Modélisation compositionnelle des structures rythmiques : une exploration didactique.

Technical Report RR-1455-11, LaBRI, Université de Bordeaux, August 2011.



David Janin.

On languages of one-dimensional overlapping tiles.

Technical Report RR-1457-12, LaBRI, Université de Bordeaux, January 2012.



David Janin.

Quasi-inverse monoids.

Technical Report RR-1459-12, LaBRI, Université de Bordeaux, March 2012.



David Janin.

## Quasi-recognizable vs MSO definable languages of one-dimensionnal overlapping tiles.

Technical Report RR-1458-12, LaBRI, Université de Bordeaux, February 2012.



Mark V. Lawson.

Semigroups and ordered categories. i. the reduced case.  
*Journal of Algebra*, 141(2):422 – 462, 1991.



Mark V. Lawson.

*Inverse Semigroups : The theory of partial symmetries.*  
World Scientific, 1998.



D.B. McAlister and N. R. Reilly.

E-unitary converters for inverse semigroups.  
*Pacific Journal of Mathematics*, 68:178–206, 1977.



K. S. S. Nambooripad.

The natural partial order on a regular semigroup.  
*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 23:249–260, 1980.