



Bases mathématiques pour les méthodes formelles

Colette Johnen
johnen@labri.fr
www.labri.fr/~johnen/

1

Plan du cours

Chapitre 1. La logique propositionnelle

Chapitre 2. La logique des prédicats du 1^{er} ordre

2

Définition

*Ethymologie : du grec λόγος **logos***

Logos, désigne le discours (textuel ou parlé).
Par extension, **logos** désigne également la
« rationalité » (l'intelligence),

La **logique** est à l'origine la recherche de
règles générales et formelles permettant de
distinguer un raisonnement concluant/juste
de celui qui ne l'est pas.

3

Chapitre 1

La Logique
Propositionnelle
(ou calcul propositionnel)

4

Plan du chapitre 1

- Syntaxe
- Interprétation
- Démonstrations Logiques

5

Syntaxe (1)

Nous noterons $\mathcal{P} = \{p, q, p', q', \dots\}$
l'ensemble des propositions atomiques. La
nature de ces propositions dépend de
l'application visée...

Nous noterons $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ l'ensemble des
formules de la logique propositionnelle
dédiée de \mathcal{P} selon les règles suivantes
(indiquées sur le transparent suivant)

6

Syntaxe (2)

Définition (formule propositionnelle).

Une formule propositionnelle est une suite de symboles pris dans l'ensemble $\mathcal{P} \cup \{ \Rightarrow, \neg, (,) \}$; la suite est construite selon les règles suivantes:

1. tout symbole de \mathcal{P} est une formule,
2. si f est une formule alors $\neg f$ est une formule (négation)
3. si f et f' sont deux formules alors $(f \Rightarrow f')$ est une formule (implication)
4. toute formule obtenue par application des règles précédentes un nombre fini de fois

7

Exemple

Exemples de formules sur $\mathcal{P} = \{p, q\}$:

- p
- $(p \Rightarrow \neg q)$
- $((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$
- $\neg(p \Rightarrow q)$

Les formules suivantes sont-elles syntaxiquement correctes (valides) sur \mathcal{P} ?

- $(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p')))$
- $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p))$
- $(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)))$

8

Plan du chapitre 1

- Syntaxe
- Interprétation
- Démonstrations Logiques

9

Interprétation (sémantique) (1)

Soit $I : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}$ (algèbre de Boole) une fonction d'interprétation, associant à chaque proposition atomique de \mathcal{P} une valeur booléenne (**vrai** ou **faux**)

L'interprétation d'une formule est totalement déterminée par l'interprétation des propositions atomiques.

10

Interprétation (sémantique) (1)

Définition de la valeur (de vérité) d'une formule f

La valeur de vérité $I(f)$ d'une formule f de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ pour l'interprétation I est définie par :

1. si $f = p \in \mathcal{P}$, alors $I(f) = I(p)$
2. si $f = \neg f'$ alors $I(f) = \overline{I(f')}$
3. si $f = (f_1 \Rightarrow f_2)$ alors $I(f) = \overline{I(f_1)} + I(f_2)$

11

Interprétation (sémantique) - exemples

Soit $\mathcal{P} = \{p, q\}$.

Soit I l'interprétation définie par

$$I(p) = \text{vrai} \text{ et } I(q) = \text{faux}$$

Soit $f = (p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p))$

$$\begin{aligned} I(f) &= I((p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p))) && \text{définition de } f \\ &= \overline{I(p)} + I((q \Rightarrow \neg p)) && \text{implication} \\ &= \overline{I(p)} + \overline{I(q)} + I(\neg p) && \text{implication} \\ &= \overline{I(p)} + \overline{I(q)} + \overline{I(p)} && \text{négation} \\ &= \overline{\text{vrai}} + \overline{\text{faux}} + \overline{\text{vrai}} && \text{prop. atomiques} \\ &= \text{faux} + \text{vrai} + \text{faux} && \text{Algèbre de Boole} \\ &= \text{vrai} && \text{Algèbre de Boole} \end{aligned}$$

12

Interprétation (sémantique) (3)

Définition (validité, satisfiabilité). Soit f une formule ; on dit que

1. f est valide (ou encore, f est une tautologie) ssi $I(f) = \text{vrai}$ pour toute interprétation I
2. f est satisfaisable ssi il existe une interprétation I pour laquelle $I(f) = \text{vrai}$
3. f est insatisfaisable ssi il n'existe pas une interprétation I pour laquelle $I(f) = \text{vrai}$

13

Interprétation (sémantique) (3)

Définition (validité, satisfiabilité). Soit f une formule ; on dit que

3. f est insatisfaisable (ou encore antilogie) ssi il n'existe pas une interprétation I pour laquelle $I(f) = \text{vrai}$

Observation

- Une formule valide est satisfaisable
- Si f est valide alors $\neg f$ est une antilogie
- Une formule satisfaisable n'est pas une antilogie
- Si $\neg f$ est satisfaisable alors f n'est pas valide

14

Interprétation (sémantique) (3)

Exemples:

1. la formule $(p \Rightarrow p)$ est valide
2. la formule $(p \Rightarrow \neg q)$ est satisfaisable mais non valide
3. la formule $\neg(p \Rightarrow p)$ est insatisfaisable

15

Formules équivalentes

Deux formules f et f' sont équivalentes ssi pour toute interprétation I on a

$$I(f) = I(f')$$

On le note $f \equiv f'$

16

Def - séquent

Un séquent est un couple de la forme (\mathcal{F}, f) , où f est une formule ($f \in \mathcal{F}$) et \mathcal{F} un ensemble fini de formules ($\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$). L'ensemble \mathcal{F} est l'ensemble des prémises du séquent, la formule f sa conclusion

Exemples :

seq1 est le séquent suivant $(\{p\}, q)$

seq2 est le séquent suivant $(\{\neg q, (p \Rightarrow q)\}, q)$

seq3 est le séquent suivant $(\{p, (p \Rightarrow q)\}, q)$

17

Def - séquent vrai dans I

Un séquent est un couple de la forme (\mathcal{F}, f) , où f est une formule ($f \in \mathcal{F}$) et \mathcal{F} un sous-ensemble fini de \mathcal{F} ($\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$). L'ensemble \mathcal{F} est l'ensemble des prémises du séquent, la formule f sa conclusion

Un séquent (\mathcal{F}, f) est vrai dans une interprétation I ssi :

- (1) Il y a une formule $g \in \mathcal{F}$ telle que $I(g) = \text{faux}$
ou
- (2) $I(f) = \text{vrai}$

18

Def - séquent faux dans I

Un séquent est un couple de la forme $(\mathcal{P}, \mathbf{f})$, où \mathbf{f} est une formule ($\mathbf{f} \in \mathbf{F}$) et \mathcal{P} un sous-ensemble fini de \mathbf{F} ($\mathcal{P} \subset \mathbf{F}$). L'ensemble \mathcal{P} est l'ensemble des prémisses du séquent, la formule \mathbf{f} sa conclusion

Un séquent $(\mathcal{P}, \mathbf{f})$ est faux dans une interprétation

I ssi :

- (1) pour toute formule $g \in \mathcal{P}$, on a $I(g) = \text{vrai}$
 et
 (2) $I(\mathbf{f}) = \text{faux}$

19

Séquents - Exemples

seq1 est le séquent suivant $(\{p\}, q)$

seq2 est le séquent suivant $(\{\neg q, (p \Rightarrow q)\}, q)$

seq3 est le séquent suivant $(\{p, (p \Rightarrow q)\}, q)$

p	q	seq1	$(p \Rightarrow q)$	seq2	seq3
faux	faux				
faux	vrai				
vrai	faux				
vrai	vrai				

20

Séquents valides (1)

Un séquent est un couple de la forme $(\mathcal{P}, \mathbf{f})$, où \mathbf{f} est une formule ($\mathbf{f} \in \mathbf{F}$) et \mathcal{P} un ensemble fini de formules ($\mathcal{P} \subset \mathbf{F}$). L'ensemble \mathcal{P} est l'ensemble des prémisses du séquent, la formule \mathbf{f} sa conclusion.

Un séquent $(\mathcal{P}, \mathbf{f})$ est valide si il est vrai dans toute interprétation (on écrit alors $\mathcal{P} \vdash \mathbf{f}$)

21

Séquents non valides - Exemples

seq1 est le séquent suivant $(\{p\}, q)$

seq2 est le séquent suivant $(\{\neg q, (p \Rightarrow q)\}, q)$

Existe-il une interprétation I pour laquelle seq1 est vrai ?

Existe-il une interprétation I pour laquelle seq1 est faux ?

seq1 est-il valide ?

Existe-il une interprétation I pour laquelle seq2 est faux ?

seq2 est-il valide ?

22

Exemple d'un séquent valide

Théorème : Le séquent $(\{p, (p \Rightarrow q)\}, q)$ est valide

Preuve :

1. Soit I1 une interprétation telle que $I1(p) = \text{faux}$ ou $I1(p \Rightarrow q) = \text{faux}$ alors le séquent est vrai dans I1.

2. Soit I2 une interprétation telle que $I2(p) = \text{vrai}$, et $I2((p \Rightarrow q)) = \text{vrai}$. Nous avons :

$I2((p \Rightarrow q)) = \overline{I2(p)} + I2(q)$ interprétation

$\text{vrai} = \text{faux} + I2(q)$

hypothèse, définition du « \neg » et de « + »

$\text{vrai} = I1(q)$

□

23

Plan du chapitre 1

- Syntaxe
- Interprétation
- Démonstrations Logiques

24

Syntaxe vs sémantique...

La notion de séquent valide est sémantique (référence aux interprétations) alors que la notion de séquent prouvable est purement syntaxique

Théorème : Un séquent est prouvable si et seulement s'il est valide.

Nous avons donc à la fois la **cohérence** (un séquent prouvable est valide) et la **complétude** (tous les valides sont prouvables).

31

Histoire - Aristote

L'étude systématique de la logique commence avec Aristote, philosophe grec du IV^e AC.

Les « pensées » d'Aristote relatifs à la logique furent édités sous le nom d'*Organon* (instrument en grec)

Pour Aristote, la logique était l'instrument du savoir, non le savoir lui-même. Elle doit permettre de distinguer les raisonnements corrects des raisonnements incorrects.

32

Syllogisme

En logique aristotélicienne, le **syllogisme** est un raisonnement logique à deux *prémises* conduisant à une *conclusion*.

Exemple de syllogisme :

*Tous les hommes sont mortels, et
les Grecs sont des hommes,
donc les Grecs sont mortels*

33

Démonstrations logiques - syllogisme

*Tous les hommes sont mortels, et
les Grecs sont des hommes,
donc les Grecs sont mortels*

h = « être un homme »
m = « être mortel »
g = « être Grec »

$(h \Rightarrow m), (g \Rightarrow h) \vdash (g \Rightarrow m)$

34

Démonstrations Logiques - syllogisme

*Tous les hommes sont mortels, et
les Grecs sont des hommes,
donc les Grecs sont mortels*

1. $(h \Rightarrow m), (g \Rightarrow h), g \vdash g$ hypothèse
2. $(h \Rightarrow m), (g \Rightarrow h), g \vdash (g \Rightarrow h)$ hypothèse
3. $(h \Rightarrow m), (g \Rightarrow h), g \vdash h$ MP (1&2)
4. $(h \Rightarrow m), (g \Rightarrow h), g \vdash (h \Rightarrow m)$ hypothèse
5. $(h \Rightarrow m), (g \Rightarrow h), g \vdash m$ MP (3&4)
6. $(h \Rightarrow m), (g \Rightarrow h) \vdash (g \Rightarrow m)$ synthèse (5)

35

Chapitre 2

La logique des prédicats
du premier ordre

36

Plan du chapitre 2

- Syntaxe
- Interprétation
- Formules équivalentes
- Satisfiabilité et validité

37

Syntaxe : briques de base... (1)

1. ensemble G de symboles de fonctions
2. ensemble X de symboles de variables :

$$X = \{ x, y, \dots \}$$

A chaque fonction g de G est associée une arité (ou rang) notée $\text{rang}(g)$ correspondant au nombre de ces paramètres

On note $C = \{ a, b, \dots, a', b', \dots \}$

l'ensemble des des constantes :

$$C = \{ g \in G \mid \text{rang}(g) = 0 \}$$

38

Syntaxe : briques de base. Exemple $G_{\mathcal{N}}$

Soit $G_{\mathcal{N}} = \{ \text{zéro}, \text{succ}, \text{plus} \}$.

zéro est d'arité 0 (c'est une constante)

succ est d'arité 1

plus est d'arité 2

39

Syntaxe : ensemble de termes (2)

Nous noterons $T(G \cup X)$ l'ensemble des termes de la logique des prédicats du premier ordre déduite de $G \cup X$ selon les règles suivantes

(indiquées sur le transparent suivant)

40

Syntaxe : un Terme (2)

Un terme sur $G \cup X$ est défini de la façon suivante :

1. si $t \in C \cup X$, alors t est un terme
2. si $f \in G$ avec $\text{rang}(f) = n > 0$, et si t_1, t_2, \dots, t_n sont n termes alors $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est un terme

Un terme clos est un terme sans variables

Les variables d'un terme non clos sont appelées « libres »

41

Syntaxe : Terme - Exemple $G_{\mathcal{N}}$

Soit $G_{\mathcal{N}} = \{ \text{zéro}, \text{succ}, \text{plus} \}$

$\text{rang}(\text{zéro}) = 0$ $\text{rang}(\text{succ}) = 1$

$\text{rang}(\text{plus}) = 2$

Soit $X_{\mathcal{N}} = \{ x, y \}$

Quelques termes :

zéro	clos
succ(x)	variable libre x
succ(zéro)	clos
succ(plus(succ(y), succ(succ(zéro))))	variable libre y

42

Syntaxe : les prédicats (1)

Un **prédicat** est une affirmation, portant sur des objets, qui peut être vraie ou fausse...

Nous utiliserons un ensemble \mathcal{P} de **symboles de Prédicats**. A chaque symbole de prédicat p , est associée une **arité** notée $\text{rang}(p)$

Un symbole de relation d'arité 0 est un **symbole propositionnel**

43

Syntaxe : les prédicats - Exemple $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$

Soit $\mathcal{P}_{\mathcal{N}} = \{\text{pair}, \text{premier}, \text{inf}\}$ avec

- $\text{rang}(\text{pair}) = 1$,
- $\text{rang}(\text{premier}) = 1$
- $\text{rang}(\text{inf}) = 2$

44

Syntaxe : les formules, enfin ! (1)

Nous noterons $\mathcal{F}(\mathcal{P} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{X})$ l'ensemble des formules de la logique des prédicats du premier ordre déduite de $\mathcal{P} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{X}$ selon les règles suivantes (indiquées sur le transparent suivant)

On notera $\mathcal{F}(\mathcal{P} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{X})$ l'ensemble des formules ainsi construites.

On utilise les symboles suivants :

$\{\Rightarrow, \neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, (,)\}$

45

Syntaxe : les formules, enfin ! (2)

Une **formule** (de la logique des prédicats du 1^{er} ordre) sur $\mathcal{P} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{X}$ est construite selon les règles suivantes:

1. si $p \in \mathcal{P}$ avec $\text{rang}(p) = n$, et si t_1, t_2, \dots, t_n sont des termes, alors $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est une formule (atomique)
2. si f et f' sont deux formules, alors $\neg f$, $(f \Rightarrow f')$, $(f \wedge f')$ et $(f \vee f')$ sont des formules
3. si f est une formule contenant la variable libre x ($x \in \mathcal{X}$) alors $\forall x f$ et $\exists x f$ sont des formules où x n'est pas une variable libre

46

Syntaxe : les formules - Exemple $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$

$\mathcal{G}_{\mathcal{N}} = \{\text{zéro}, \text{succ}, \text{plus}\}$
 $\mathcal{X}_{\mathcal{N}} = \{x, y, z\}$
 $\mathcal{P}_{\mathcal{N}} = \{\text{pair}, \text{premier}, \text{inf}\}$

Nous avons alors les formules suivantes :

$\text{pair}(\text{plus}(x, x))$ variable libre x
 $\text{inf}(\text{zéro}, \text{succ}(y))$ variable libre y
 $\forall x \text{pair}(\text{plus}(x, z))$ variable libre z
 $\exists y \text{premier}(y)$ close
 $\exists x (\text{premier}(x) \wedge \text{inf}(x, \text{succ}(\text{succ}(\text{zéro}))))$ close

47

Syntaxe : les formules - Exemple $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$

Indiquez les variables libres des formules suivantes :

$\text{pair}(\text{plus}(x, x))$
 $\text{inf}(\text{zéro}, \text{succ}(y))$
 $\forall x \text{pair}(\text{plus}(x, x))$
 $\text{inf}(x, \text{plus}(x, y))$
 $\forall x \text{inf}(x, \text{plus}(x, y))$
 $\exists y \text{inf}(x, \text{plus}(x, y))$

48

Logique propositionnelle versus logique des prédicats

Remarque: La logique propositionnelle est « contenue » dans la logique des prédicats du 1^{er} ordre (on se restreint aux symboles propositionnels et aux symboles \Rightarrow , \neg , (et)).

49

Plan du chapitre 2

- Syntaxe
- Interprétation
- Formules équivalentes
- Satisfiabilité et validité

50

Interprétation des fonctions de \mathcal{G} dans \mathcal{E}

\mathcal{E} est le **domaine d'interprétation**

- A chaque fonction g , on associe une fonction notée $g_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}^{\text{rang}(g)} \rightarrow \mathcal{E}$
- A chaque constante $c \in \mathcal{C}$, on associe un élément de \mathcal{E} noté $c_{\mathcal{E}}$

Ainsi, chaque terme clos de $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ a une et une seule valeur dans \mathcal{E}

Remarque: plusieurs interprétations de \mathcal{G} dans \mathcal{E} peuvent être définies.

51

Exemple - Une interprétation possible de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ dans \mathcal{N}

- A la constante **zéro** est associé $\text{zéro}_{\mathcal{N}}$, $\text{zéro}_{\mathcal{N}} = 0$

- A la fonction **succ** est associée $\text{succ}_{\mathcal{N}}$
 $\text{succ}_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$
 $a \rightarrow a+1$

- A la fonction **plus** est associée $\text{plus}_{\mathcal{N}}$
 $\text{plus}_{\mathcal{N}} : \mathcal{N}^2 \rightarrow \mathcal{N}$
 $a, b \rightarrow a+b$

52

Exemple - Interprétation des termes de $\mathcal{T}(\mathcal{G}_{\mathcal{N}})$ dans \mathcal{N}

Donnez l'interprétation des termes clos suivants de $\mathcal{T}(\mathcal{G}_{\mathcal{N}})$ dans \mathcal{N} en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$:

$\text{succ}(\text{zéro})$
 $\text{plus}(\text{succ}(\text{zéro}), \text{succ}(\text{zéro}))$
 $\text{succ}(\text{succ}(\text{zéro}))$
 $\text{plus}(\text{succ}(\text{zéro}), \text{succ}(\text{succ}(\text{zéro})))$

 $\text{plus}(\text{succ}(\text{zéro}), \text{plus}(\text{succ}(\text{zéro}), \text{succ}(\text{zéro})))$

53

Interprétation des formules closes de $\mathcal{F}(\mathcal{P} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{X})$ en fonction de l'interprétation de \mathcal{G}

Interprétation de \mathcal{P} : à chaque prédicat p , on associe une fonction de $\mathcal{E}^{\text{rang}(p)}$ à \mathcal{B}

$$\mathcal{B} = \{\text{vrai}, \text{faux}\}$$

Ainsi, chaque formule close de $\mathcal{F}(\mathcal{P} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{X})$ a une et une seule valeur dans \mathcal{B}

Remarque: plusieurs interprétations de \mathcal{P} en fonction de la même interprétation de \mathcal{G} sur \mathcal{E} peuvent être définies.

54

Exemple - une interprétation possible de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$ dans \mathcal{N}

+ au prédicat **premier** est associé la fonction
 $\text{premier}_s : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$
 $\text{premier}_s(\text{tx}) = \text{vrai}$ si la valeur du terme tx est un nombre premier

+ au prédicat **pair** est associé la fonction
 $\text{pair}_s : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$
 $\text{pair}_s(\text{tx}) = \text{vrai}$ si la valeur du terme tx est un entier pair.

+ $\text{inf}_s : \mathcal{N}^2 \rightarrow \mathcal{B}$
 $\text{inf}_s(\text{tx}, \text{ty}) = \text{vrai}$ si la valeur du terme tx est inférieure ou égale à la valeur du terme ty .

55

Exemple - Interprétation des formules closes de $\mathcal{F}(\mathcal{P}_{\mathcal{N}} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{N}} \cup \mathcal{X})$ dans \mathcal{N}

Donnez l'interprétation des formules closes suivantes en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$

$\text{pair}(\text{succ}(\text{zéro}))$
 $\text{inf}(\text{plus}(\text{succ}(\text{zéro}), \text{succ}(\text{zéro})), \text{succ}(\text{zéro}))$
 $\text{pair}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zéro})))$
 $\text{premier}(\text{plus}(\text{succ}(\text{zéro}), \text{plus}(\text{succ}(\text{zéro}), \text{succ}(\text{zéro}))))$

56

Opérateurs logiques : \forall \wedge

f1	f2	$(f1 \vee f2)$	$(f1 \wedge f2)$	$(\neg f1 \vee \neg f2)$	$(\neg f1 \wedge \neg f2)$
faux	faux				
faux	vrai				
vrai	faux				
vrai	vrai				

57

Le quantificateur \forall

$\forall x$: quelque soit x tel que ...

Traduire en Français, chaque formule close suivante en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$

$\forall x \neg \text{premier}(x)$:

$\forall x (\text{premier}(x) \wedge \text{pair}(x))$:

$\forall x (\text{pair}(x) \vee \neg \text{premier}(x))$:

58

Les quantificateurs : \forall et \exists

$\forall x$: quelque soit x tel que ...

Écrivez la négation des formules suivantes en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$:

$\forall x \neg \text{premier}(x)$:

$\forall x (\text{premier}(x) \wedge \text{pair}(x))$:

$\forall x (\text{pair}(x) \vee \neg \text{premier}(x))$:

59

Le quantificateur \exists

$\exists x$: il existe x tel que ...

Traduire en Français, chaque formule close suivante en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$

$\exists x \neg \text{premier}(x)$:

$\exists x (\text{premier}(x) \wedge \text{pair}(x))$:

$\exists x (\text{premier}(x) \vee \neg \text{pair}(x))$:

60

Les quantificateurs \exists et \forall

$\exists x$: il existe x tel que ...

Ecrivez la négation des formules suivantes en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$

$\exists x \neg \text{premier}(x)$:

$\exists x (\text{premier}(x) \wedge \text{pair}(x))$:

$\exists x (\text{premier}(x) \vee \neg \text{pair}(x))$:

61

Les quantificateurs : $\forall \exists$

Traduire en Français les formules suivantes en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$

1. $\forall x \exists y \text{ inf}(x, y)$

2. $\exists x \forall y \text{ inf}(x, y)$

Les formules sont-elles vraies ?

Ecrivez leur négation

62

Opérateur logique \Rightarrow

Traduire en Français les formules closes suivantes en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$

$\forall x (\text{premier}(x) \Rightarrow \neg \text{pair}(x))$:

$\forall x (\text{pair}(x) \Rightarrow \text{pair}(\text{plus}(x,x)))$:

$\forall x \neg (\text{premier}(x) \Rightarrow \text{pair}(x))$:

63

Opérateur logique \Rightarrow

Ecrivez la négation des formules suivantes en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$

$\forall x (\text{premier}(x) \Rightarrow \neg \text{pair}(x))$:

$\forall x (\text{pair}(x) \Rightarrow \text{pair}(\text{plus}(x,x)))$:

$\forall x \neg (\text{premier}(x) \Rightarrow \text{pair}(x))$:

64

Exemple - Interprétation des formules closes de $\mathcal{F}(\mathcal{P}_{\mathcal{N}} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{N}} \cup \mathcal{X}_{\mathcal{N}})$ dans \mathcal{N}

Traduire en Français la formule close suivante en fonction de l'interprétation de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$:

a formule est-elle vraie ?

Ecrivez sa négation

$\forall x \exists y (\text{inf}(x,y) \wedge \text{premier}(y))$

65

Interprétation des formules de $\mathcal{F}(\mathcal{P} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{X})$

Valuation de \mathbf{x} : à chaque variable de \mathbf{x} , on associe une valeur du domaine \mathbf{E}

Ainsi, chaque terme de $\mathcal{T}(\mathcal{G} \cup \mathcal{X})$ a une et une seule valeur dans \mathbf{E} et chaque formule de $\mathcal{F}(\mathcal{P} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{X})$ a une et une seule valeur booléenne

Remarque: plusieurs valuations de \mathbf{x} sur \mathbf{E} peuvent être définies pour une interprétation de \mathcal{G} et \mathcal{P}

66

Exemple - une interprétation possible de $x_{\mathcal{N}}$ dans \mathcal{N}

$x_{\mathcal{N}} = \{ x, y, z \}$

La valeur de x est 5

La valeur de y est 7

Et la valeur de z est 11.

Donnez l'interprétation des formules suivantes en fonction de la valuation de $x_{\mathcal{N}}$, et de l'interprétation de $G_{\mathcal{N}}$ et de $P_{\mathcal{N}}$:

$\forall z \text{ inf}(\text{plus}(z, x), \text{plus}(z, y))$

$(\text{inf}(x, y) \vee \text{inf}(z, y))$

67

Plan du chapitre 2

- Syntaxe
- Interprétation
- Formules équivalentes
- Satisfiabilité et validité

68

Formules équivalentes

Deux formules f_1 et f_2 sont équivalentes, notée $f_1 \equiv f_2$, si pour dans toute interprétation, on a la valeur de f est égale à la valeur de f' .

Les formules suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \neg \neg f &\equiv f \\ \neg(f \wedge f') &\equiv (\neg f \vee \neg f') \\ \neg(f \vee f') &\equiv (\neg f \wedge \neg f') \\ (\neg f \vee f') &\equiv (f \Rightarrow f') \\ \forall x f &\equiv \neg \exists x \neg f \\ \exists x f &\equiv \neg \forall x \neg f \end{aligned}$$

69

Formules équivalentes (2)

A démontrer :

$$\forall x (p_1(x) \wedge p_2(x)) \equiv (\forall x p_1(x) \wedge \forall x p_2(x))$$

$$\exists x (p_1(x) \vee p_2(x)) \equiv (\exists x p_1(x) \vee \exists x p_2(x))$$

si l'interprétation de $\exists x (p_1(x) \wedge p_2(x))$ est vrai alors l'interprétation de $(\exists x p_1(x) \wedge \exists x p_2(x))$ est vrai

si l'interprétation de $(\forall x p_1(x) \vee \forall x p_2(x))$ est vrai alors l'interprétation de $\forall x (p_1(x) \vee p_2(x))$ est vrai

70

Formules équivalentes (3)

Les assertions suivantes sont fausses :

si l'interprétation de $(\exists x p_1(x) \wedge \exists x p_2(x))$ est vrai alors l'interprétation de $\exists x (p_1(x) \wedge p_2(x))$ est vrai

si l'interprétation de $\forall x (p_1(x) \vee p_2(x))$ est vrai alors l'interprétation de $(\forall x p_1(x) \vee \forall x p_2(x))$ est vrai

Exemple:

$(\exists x \text{premier}(x) \wedge \exists x \text{inf}(x, \text{succ}(\text{zéro})))$
 $\forall x (\text{inf}(x, \text{succ}(\text{zéro})) \vee \text{inf}(\text{zéro}, x))$

71

Plan du chapitre 2

- Syntaxe
- Interprétation
- Formules équivalentes
- Satisfiabilité et validité

72

Satisfiabilité, validité

- **f est satisfaisable dans une Interprétation** s'il existe une valuation des variables telle que **f** est **vrai**
 $\forall x \text{ inf}(\text{succ}(x), x)$ n'est pas satisfiable sur \mathcal{N}
- **f est satisfaisable** s'il existe une interprétation des prédicats et des fonctions et une valuation des variables telle que **f** est **vrai**
 $\forall x \forall y \text{ inf}(\text{succ}(x), \text{plus}(x, y))$ est satisfiable sur \mathcal{N} mais non valide ($y = 0$)

73

Satisfiabilité, validité

- **f est valide dans une interprétation** si **f** est **vrai** pour toute valuation des variables
 $\forall x \text{ inf}(x, \text{plus}(x, y))$ est valide sur \mathcal{N} mais non valide sur \mathcal{Z} ($y < 0$)
- **f est universellement valide** si **f** est valide dans toute interprétation
 $f_3 = (\forall x R(x) \Rightarrow R(y))$

74

Séquents valides

La notion de séquent est défini comme dans le cas de la logique propositionnelle. Nous avons alors :

Un séquent (\mathcal{F}, f) est **valide dans I**, noté $\mathcal{F} \vdash_I f$, si pour toute valuation ν nous avons :

soit il existe $g \in \mathcal{F}$ telle que l'interprétation de g dans I est **faux**, soit l'interprétation de f dans I est **vrai**

Un séquent est **universellement valide** s'il est valide dans toute interprétation.

75

Séquents valides - Exemple $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$

- Le séquent $(\emptyset, \forall x \forall y \text{ inf}(x, \text{plus}(x, \text{plus}(y, \text{succ}(z))))))$ est valide dans \mathcal{N} avec l'Interprétation ...
- Le séquent $(\{\forall x (R(x) \Rightarrow R'(x)), \exists y R(y)\}, \exists z R'(z))$ est universellement valide

76